1	2	3	4	Calif.

Nombre y Apellido:

18 de Julio de 2005

Análisis Real - Medida y Probabilidad. Segundo Parcial

Primer cuatrimestre de 2005

1. Sea $1 < p < \infty$. Sean $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, y f una función medible tales que ambas son no negativas. Supongamos que existe $C > 0$ tal que

$$|\{x : f(x) \geq t\}| \leq \frac{C}{t} \int_{\{x:f(x)\geq t\}} g(x)dx.$$

   Probar:

   a) $\|f\|_p^p \leq \frac{Cp}{p-1} \int f^{p-1} g(x)dx$

   b) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, entonces $\|f\|_p \leq \frac{Cp}{p-1} \|g\|_p$.

2. Sean $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ funciones absolutamente continuas, crecientes y tales que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge a un límite finito para todo $x \in [0,1]$, al que llamamos $f(x)$.

   Probar que f es derivable en casi todo punto y $f'(x) = \sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ para casi todo punto.

3. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $N = \{Z \in \Sigma : \mu(Z) = 0\}$. Sea

$$\overline{\Sigma} = \{E \cup F : E \in \Sigma, F \subset Z \text{ para algún } Z \in N\}.$$

   Probar que $\overline{\Sigma}$ es una σ-álgebra y que existe una única medida $\overline{\mu}$ definida en $\overline{\Sigma}$ que extiende a μ (es decir, que $\mu(E) = \overline{\mu}(E)$ para todo $E \in \Sigma$).

4. Sea ν una medida con signo en $\mathbb{R}^d$ finita y absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue. Dado $E \subset \mathbb{R}^d$ medible, probar que la función $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \nu(E + x)$ es continua.