

ANÁLISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2005.

PRACTICA 0

1. Sean $(X_i)_{i \in I}$ y $(Y_j)_{j \in J}$ dos familias de conjuntos. Probar:

$$(a) \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \cup \left(\bigcap_{j \in J} Y_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cup Y_j)$$

$$(b) \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \cap \left(\bigcup_{j \in J} Y_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \cap Y_j)$$

$$(c) \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \times \left(\bigcap_{j \in J} Y_j \right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j)$$

$$(d) \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \times \left(\bigcup_{j \in J} Y_j \right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X_i \times Y_j)$$

(e) Si $I = J$ y $\forall i \in I$ se tiene $Y_i \subset X_i$ entonces

$$\left(\bigcup_{i \in I} Y_i \right) \subset \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \text{ y } \left(\bigcap_{i \in I} Y_i \right) \subset \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right)$$

(f) Si $A \subset I$ entonces

$$\left(\bigcup_{i \in A} X_i \right) \subset \left(\bigcup_{i \in I} X_i \right) \text{ y } \left(\bigcap_{i \in I} X_i \right) \subset \left(\bigcap_{i \in A} X_i \right)$$

(g) Para cada conjunto F se tiene:

$$F - \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I} (F - X_i) \text{ y } F - \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (F - X_i)$$

(h) Encontrar conjuntos A_{nk} ($n, k \in \mathbb{N}$) tales que:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{nk} \neq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{nk}$$

2. Sean $(J_l)_{l \in L}$ y $(X_i)_{i \in I}$ dos familias de conjuntos tales que $I = \bigcup_{l \in L} J_l$. Probar:

$$(a) \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{l \in L} \left(\bigcup_{i \in J_l} X_i \right)$$

$$(b) \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcap_{l \in L} \left(\bigcap_{i \in J_l} X_i \right)$$

3. Si $A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$ con $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset$, $A_1 \times B_1 \neq \emptyset$ y $A_2 \times B_2 \neq \emptyset$ entonces

$$(A = A_1 = A_2 \text{ y } B = B_1 \cup B_2) \text{ ó } (A = A_1 \cup A_2 \text{ y } B_1 = B_2 = B).$$

4. Sean $f : E \rightarrow F$, $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset F$, $D \subset F$. Probar:

- (a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
- (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
- (d) si f es inyectiva $\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- (e) $A \subset f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(D)) \subset D$
- (f) si f es inyectiva $\Rightarrow f(E - A) \subset F - f(A)$
- (g) si f es suryectiva $\Rightarrow f(E - A) \supset F - f(A)$
- (h) $f^{-1}(F - B) = E - f^{-1}(B)$

5. Sea $f : E \rightarrow F$ una función. Sean $(X_i)_{i \in I}$ y $(Y_j)_{j \in J}$ dos familias de subconjuntos de E y F respectivamente. Probar:

- (a) $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$
- (b) $f(\bigcap_{i \in I} X_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(X_i)$
- (c) si f es inyectiva $\Rightarrow f(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} f(X_i)$
- (d) $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} Y_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$
- (e) $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} Y_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$

6. Dada una sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de E , se define:

$$\underline{\lim} E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k \quad (\text{límite inferior})$$

$$\overline{\lim} E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k \quad (\text{límite superior})$$

Probar:

- (a) $E - \underline{\lim} E_n = \overline{\lim} (E - E_n)$
- (b) $E - \overline{\lim} E_n = \underline{\lim} (E - E_n)$
- (c) $\underline{\lim} E_n \subset \overline{\lim} E_n$
Si $\underline{\lim} E_n = \overline{\lim} E_n$, entonces se dice que existe el límite de la sucesión E_n y a este conjunto se lo denota por $\lim E_n$. Probar:
- (d) Si $E_{n+1} \subset E_n \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$
- (e) Si $E_n \subset E_{n+1} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$
- (f) Dada una sucesión de subconjuntos de E se define:

$$\begin{cases} D_0 = \emptyset \\ D_{n+1} = D_n \triangle E_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} .$$

Probar que existe $\lim D_n$ si y sólo si $\lim E_n = \emptyset$.

7. Sean A y B subconjuntos de un conjunto X , se define:

$\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ como

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

- (a) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \forall x \in X$
- (b) $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \forall x \in X$
- (c) $\chi_{A \cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A \cap B}(x) \forall x \in X$

8. Sea $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $f : X \rightarrow Y$. Probar:

- (a) $f(\underline{\lim} E_n) \subset \underline{\lim} f(E_n)$
- (b) $f(\overline{\lim} E_n) \subset \overline{\lim} f(E_n)$
- (c) $f(\underline{\lim} E_n) \subset \overline{\lim} f(E_n)$
- (d) Si f es inyectiva, en (a) y (b) vale la igualdad.

9. Sea E un conjunto y $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ tal que si:

$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$

Sean

$$V = \bigcap \{Z \subset E : f(Z) \subset Z\},$$

$$W = \bigcup \{Z \subset E : f(Z) \supset Z\}.$$

Probar que:

- (a) $f(V) = V$ y $f(W) = W$
- (b) Sea $A \subset E$ tal que $f(A) = A \Rightarrow V \subset A \subset W$

10. Probar las siguientes propiedades de la suma de cardinales:

- (a) $a + b = b + a$
- (b) $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (c) $a + 0 = a$
- (d) si $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

11. Probar las siguientes propiedades del producto de cardinales:

- (a) $a \cdot b = b \cdot a$
- (b) $a(b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- (c) $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$
- (d) $a \cdot \bar{1} = a$
- (e) Si $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$
- (f) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

12. Probar las siguientes propiedades de la potenciación de cardinales:

- (a) si $a \neq 0 \Rightarrow a^{\bar{0}} = \bar{1}$

(b) $\bar{0}^b = \bar{0}$ si $b \neq 0$. ¿ qué sucede si $b = \bar{0}$?

(c) $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

(d) $a^{bc} = (a^b)^c$

13. Sea $a = \#X$ entonces

(a) $\#\mathcal{P}(X) = \bar{2}^a$

(b) $a \leq \bar{2}^a$

(c) $a < \bar{2}^a$

14. Sean a y b cardinales tales que : $a^2 = a$ y $b \leq a$ entonces

(a) si $\bar{1} \leq b \Rightarrow b \cdot a = a$,

(b) si $\bar{2} \leq a \Rightarrow b + a = a$.