

ANÁLISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2005

PRACTICA 7 : MEDIDA EN ESPACIOS ABSTRACTOS.

1. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:
 - (a) Si $Z_1 \in \Sigma$, $Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.
 - (b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.
2. Sean X un conjunto y A_1, \dots, A_N subconjuntos disjuntos de X tal que $\cup_{i=1}^N A_i = X$. Sea Σ la σ -álgebra generada por $\{A_1, \dots, A_N\}$. Probar:
 - (a) $B \in \Sigma$ si y sólo si existen i_1, \dots, i_k tales que $B = \cup_{j=1}^k A_{i_j}$.
 - (b) Si f es Σ -medible, entonces f es constante sobre cada A_i .
3. Teorema de Egorov: Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k \geq 1}$ converge a.e. en E a un límite finito. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E \setminus A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k \geq 1}$ converge uniformemente en A .
4. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y si f y f_k son medibles y finitas a.e. en un conjunto medible E , entonces $(f_k)_{k \geq 1}$ converge en medida sobre E a f ($f_k \xrightarrow{m} f$) si para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

Probar:

- (a) Si $f_k \rightarrow f$ a.e. sobre E y $\mu(E) < \infty$, entonces $f_k \xrightarrow{m} f$ sobre E .
 - (b) Si $f_k \xrightarrow{m} f$ sobre E , existe una subsucesión $(f_{k_j})_{j \geq 1}$ tal que $f_{k_j} \rightarrow f$ a.e. en E .
5. Sea (X, Σ, μ) espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ y f funciones medibles y finitas a.e. Decimos que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \Sigma$ tal que:

$$\mu(A_\epsilon) < \epsilon \text{ y } f_n \xrightarrow{\rightarrow} f \text{ en } X \setminus A_\epsilon.$$

Probar que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, $(f_n)_{n \geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

6. Sea $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ no negativa e integrable. Definimos $\mu(A) = \int_A g(x) dx$, para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible Lebesgue. Entonces:

$$f_n \xrightarrow{m} f \quad \Rightarrow \quad f_n \xrightarrow{\mu} f.$$

7. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y μ y ν dos medidas sobre Σ tales que $\mu(A) \leq \nu(A)$, para todo $A \in \Sigma$. Probar que

$$f \in L^1(X, \nu) \quad \Rightarrow \quad f \in L^1(X, \mu).$$

8. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.

(a) Si $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \rightarrow 0$, probar que $f_n \xrightarrow{m} 0$.

(b) Si $\mu(X) < \infty$ y $f_n \xrightarrow{m} 0$, probar que $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \rightarrow 0$.

9. Sean $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = P(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = \#(A)$ (cardinal de A). Probar que $f \in L^1(\mathbb{N}, \mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

10. Sean $X = \mathbb{N}$ y μ la medida sobre \mathbb{N} tal que: $\mu(E) = \sum_{n:n \in E} \frac{1}{n^2}$.

(a) Probar que μ es una medida finita.

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $f_k : X \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_k(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad 1 \leq n \leq k \\ 0 & , \quad k < n. \end{cases}$$

Probar que $(f_k)_{k \geq 1}$ converge en μ -medida.

(c) Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). ¿Para qué valores de $p \geq 1$, resulta $f \in L^p(X, \mu)$?

11. Sean (X, Ω, ν) un espacio de medida finita y $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ una función ν -medible. Probar que:

(a) si φ es medible entonces está definida $\int_X \varphi \ln(\varphi) d\nu$,

(b) si φ pertenece a $L^2(X, d\nu)$ entonces $\varphi \ln(\varphi)$ pertenece a $L^1(X, d\nu)$.

12. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ espacio medible, $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ que satisface:

(a) $A, B \in \mathcal{F} \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(b) $A_n \in \mathcal{F}$ ($n \in \mathbb{N}$) $\wedge A_n \searrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

Probar que μ es una medida.

13. Sean $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\varphi : [0, 1) \rightarrow S^1$, $\varphi(t) = e^{2\pi it}$. En S^1 se considera la σ -álgebra

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq S^1 : \varphi^{-1}(A) \text{ es medible Lebesgue}\}$$

y la medida m sobre \mathcal{A} definida por:

$$m(A) = |\varphi^{-1}(A)|.$$

Dada $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que $f \circ \varphi$ es medible Lebesgue, probar que f es \mathcal{A} -medible y

$$\int_{S^1} f \, dm = \int_0^1 f \circ \varphi \, dt.$$

Medidas con signo

14. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ) . Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$. Dado $E \in \Sigma$, probar:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

15. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f tal que existe $\int_X f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu$ ($E \in \Sigma$). Probar que:

(a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu$ ($E \in \Sigma$),

(b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$ ($E \in \Sigma$).

16. (a) Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar:

$$\lambda \ll \mu \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \mu(E) < \delta \Rightarrow \lambda(E) < \epsilon.$$

(b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0, 1)$ medible Lebesgue.)

17. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una σ -álgebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

(a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu$ ($B \in \Sigma_2$), entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2 , absolutamente continua con respecto a μ . Deducir que existe g Σ_2 -medible tal que:

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \quad (B \in \Sigma_2).$$

(b) Si $\Sigma_2 = \{\emptyset, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \Sigma_1$, determinar la función g del inciso anterior.

18. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, M, \delta)$ donde M es la σ -álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

(a) Probar que no existe $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x) dx \quad (\forall A \in M).$$

¿Encierra esto alguna contradicción?

(b) Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ .

(c) Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ medible, hallar $\int_{\mathbb{R}^n} f d\delta$.

19. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio de medida (X, Σ) . Si para todo $\epsilon > 0$, existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \phi, \quad A_\epsilon \cup B_\epsilon = X, \quad \mu(A_\epsilon) < \epsilon \quad \text{y} \quad \nu(B_\epsilon) < \epsilon;$$

entonces existen $A \in \Sigma$ y $B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \phi, \quad A \cup B = X, \quad \mu(A) = 0 \quad \text{y} \quad \nu(B) = 0.$$

20. Para cada medida de Borel finita ν sobre \mathbb{R} , se define $f_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f_\nu(x) = \nu((-\infty, x)).$$

Probar:

(a) f_ν es monótona creciente, acotada, continua por izquierda y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\nu(x) = 0.$$

(b) f_ν es continua en $x_0 \Leftrightarrow \nu(\{x_0\}) = 0$.

(c) Si \mathcal{L} es la medida de Lebesgue,

$$\nu \ll \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad f_\nu \text{ es una función absolutamente continua.}$$

21. Sea μ la medida de contar en \mathbb{R} y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe f tal que

$$m(E) = \int_E f d\mu.$$

¿Contradice esto algún teorema conocido?

22. Sean (X, Σ) un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada definidas en Σ , tales que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int f d\nu = \int f g d\mu \quad \forall f \text{ medible.}$$

- (b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν .
23. Sea (X, Σ) un espacio de medida. Sean μ y ν dos medidas finitas en ese espacio. Definamos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por $\bar{\mu} = \mu + \nu$.
- (a) Probar que existe una función $f \in L^1(\bar{\mu})$ tal que $\nu(E) = \int f d\bar{\mu}$ y que $0 \leq f(x) < 1$ para μ -casi todo x .
- (b) Deducir que $\int g d\nu = \int g f d\bar{\mu}$ para toda $g \geq 0$ medible.
- (c) Si, además, $\nu(E) = \int_E h d\mu$ para todo $E \in \Sigma$ entonces $h(x) = \frac{f(x)}{1 - f(x)}$ para μ -casi todo $x \in X$.
Sugerencia: reescribir el item (b) como $\int g(1 - f)d\nu = \int g f d\mu$ y elegir una g adecuada.