ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2005

PRACTICA 2 : FUNCIONES MEDIBLES.

1. Sea B la σ–álgebra de Borel de $\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$. Probar:
   (a) Si f es medible entonces $f^{-1}(B)$ es medible para todo $B \in$ B .
   (b) Si $\overline{\text{B}} = \{E = B \cup A,\ B \in \text{B} \text{ y } A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces, f es medible si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\text{B}}$.

2. Sean $f, g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ medibles. Mostrar que los conjuntos $\{f > g\}$ y $\{f = g\}$ son medibles.

3. (a) Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ es medible. ¿Es f medible?
   (b) Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f|$ es medible. ¿Es f medible?

4. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces:
   (a) Si f es monótona, entonces f es medible Borel.
   (b) Si f es derivable sobre $\mathbb{R}$, entonces f' es medible Borel.

5. Si $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, entonces existe $g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ a.e.

6. Sea $f:\mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ continua en casi todo punto. Probar que f es medible.

7. (a) Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a.e., tal que no existe $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifica: $f = g$ a.e.
   (b) Hallar $f, g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que g es continua, $g = f$ a.e. y f es discontinua en todo punto.

8. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}^d$.
   (a) Sea $E \subseteq I$ medible. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g\colon I \to \mathbb{R}$ continua tal que
   $$|\{x \in I : g(x) \neq \chi_E(x)\}| < \epsilon.$$
   (b) Sea φ una función simple definida sobre I. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g\colon I \to \mathbb{R}$ continua tal que
   $$|\{x \in I : g(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon.$$
   (c) Sea $f\colon I \to \overline{\mathbb{R}}$ medible y finita en c.t.p. Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe φ simple tal que
   $$|\{x \in I : |\varphi(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$
   (d) Sea f como en (c). Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe g continua tal que
   $$|\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

9. Sea E medible y $(f_k)_{k\geq 1}\colon E \to \mathbb{R}$ una sucesi'on de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

Probar que si para todo $\alpha > 0$, existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$:

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad |\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}| \leq \alpha/k,$$

entonces $|E| = 0$.

10. Sea E de medida finita y $(f_k)_{k\geq 1}\colon E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathbb{N}\ .$$

Probar que dado $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado y $M > 0$:

$$|E \backslash F| < \epsilon \quad \text{ y } \quad |f_k(x)| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}\ , \quad \forall x \in F.$$

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = n\ \chi_{[1/n,2/n]}(x)$. Probar
    (a) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente,
    (b) para cada $\delta > 0, (f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en $[\delta, \infty)$,
    (c) no existe $E \subset [0, \infty)$ tal que $|E| = 0$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en E^c.

12. (a) Sea E de medida finita y sean $f, (f_n)_{n\geq 1}\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, finitas en casi todo punto de E y tal que $f_n \to_{n\to\infty} f$ a.e. en E. Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i\geq 1}$ de conjuntos medibles de E tal que:
        i. $|E \backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i| = 0$,
        ii. para cada $i \geq 1, f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow}_{n\to\infty} f$ en E_i.
    (b) El mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde A_k es de medida finita para cada $k \in \mathbb{N}$.

13. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles definidas sobre un conjunto A y finitas en c.t.p.. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de A medibles, tales que $|A \backslash A_n| \to_{n\to\infty} 0$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \overset{m}{\to} f$ entonces $f_n \overset{m}{\to} f$.

14. Supongamos que $f_k \overset{m}{\to} f$ y $g_k \overset{m}{\to} g$ sobre E. Probar:
    (a) $f_k + g_k \overset{m}{\to} f + g$ sobre E.
    (b) Si $|E| < +\infty$, entonces $f_k g_k \overset{m}{\to} fg$ sobre E. Mostrar que la hipótesis $|E| < +\infty$, es necesaria.
    (c) Sea $(f_k/g_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en casi todo punto de E. Si $|E| < +\infty$, $g_k \to g$ sobre E y $g \neq 0$ a.e., entonces $f_k/g_k \overset{m}{\to} f/g$.

15. Sea $f_1\colon [0, 1] \to [0, 1]$ la función de Cantor–Lebesgue y $f : [0, 1] \to [0, 2]$ definida por: $f(x) = f_1(x) + x$.
    (a) f es continua y biyectiva. Además f^{-1} es continua.

(b) Si C es el Ternario de Cantor, $|f(C)| = 1$.

(c) Sea $g = f^{-1}$. Mostrar que existe A medible tal que $g^{-1}(A)$ es no medible.

(d) Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.

(e) Hallar $h_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ medible Borel y $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.

16. Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es s.c.s. (s.c.i., continua) entonces f es medible borel.