ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2005

PRACTICA 4 : TEOREMA DE FUBINI.

1. (a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula.

   (b) Sea $f(x, y)$ una función medible y no negativa definida sobre $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y. Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x.

2. Sean f y g funciones medibles definidas sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ es medible. Deducir que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$ es medible en $\mathbb{R}^{n+m}$ y $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

3. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ medible. Si $h : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$ es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

4. Sean $I = [0, 1]$ y $E \subseteq I \times I$ tales que:

$$|E_x|_e = |I \setminus E_y|_e = 0, \qquad \forall (x, y) \in I \times I.$$

   Probar que E no es medible.

5. Sea f una función medible y no negativa definida sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha > 0$, se define

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$

   La función ω se llama <u>distribución de f sobre E</u>. Probar:

   (a) $\omega : (0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función decreciente.

   (b) $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.

   (c) $\omega(\alpha-) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}|$.

   (d) ω continua en $\alpha \Rightarrow |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|$.

(e) Si definimos el conjunto

$$O_E(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, 0 \leq t < f(x)\},$$

para cada $\alpha \in (0,\infty)$, se tiene que:

$$\{x : (x,\alpha) \in O_E(f)\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}.$$

(f) $\int_E f = \int_0^\infty \omega(\alpha)d\alpha$. (Sug.: Notar que $\int_E f = |O_E(f)| = \int\int_{O_E(f)} dxd\alpha$, y usar el Teorema de Tonelli.)

(g) Para cada $p : 0 < p < \infty$,

$$\int_E f^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1}\omega(\alpha)d\alpha.$$

6. Usar el Teorema de Fubini para probar la igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

7. Dada $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ medible tal que para algún $\alpha \in (0,1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha/(1+t)$ para todo $t \geq 0$, consideramos la funci'on $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, definida por $G(x,t) = e^{-xt}f(t)$. Demostrar:

   (a) G es medible.

   (b) $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$.

8. Definimos $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ k(x,y) = x.y$. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $h(x,y) = f(x.y)$ es medible.

9. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles. Probar que la funci'on $h(x) = |(A - x) \cap B|$ es medible y $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = |A||B|$.

10. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

11. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^p)$.

    (a) Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^p$, la función $e^{-2\pi i<\xi,x>}f(x)$ (donde $<\xi, x>= \sum_{i=1}^p \xi_i x_i$,) es medible e integrable.
    Se define la <u>Transformada de Fourier de f</u> como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^p} e^{-2\pi i<\xi,x>} f(x)dx, \qquad (\xi \in \mathbb{R}^p).$$

    (b) Probar:

    i. $\hat{f}$ es acotada y uniformemente continua.
    ii. $\hat{f}(\xi) \longrightarrow_{|\xi|\to\infty} 0$, (Lema de Riemman–Lebesgue).
    iii. Si $f(x) = f_1(x_1)\dots f_p(x_p)$, donde cada $f_k \in L^1(\mathbb{R}),\ 1 \leq k \leq n$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1)\dots\hat{f}_p(\xi_p)$.
    iv. Si $g \in L^1(\mathbb{R}^p)$, entonces $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.