ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2005.

PRACTICA 6: DIFERENCIACION.

1. Sea $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ el conjunto formado por aquellas funciones medibles que son integrables sobre todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^d$. Probar:

   (a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p \leq \infty$, entonces $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

   (b) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ entonces Mf es semicontinua inferiormente.

2. Definimos, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

$$f^{**}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f|$$

   Probar que existen constantes $c, C > 0$ que dependen sólo de la dimensión, tal que

$$cMf(x) \leq f^{**}(x) \leq CMf(x)$$

   es decir, f^{**} y Mf son funciones equivalentes.

3. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface: $|\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}| > 0$. Probar que existe $c > 0$ tal que $Mf(x) \geq c|x|^{-d}$ para $|x| \geq 1$. Deducir que $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^d)$, salvo que $f \equiv 0$.

4. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

   (a) Probar que si $1 \leq p < \infty$, existe $c > 0$ que no depende de f tal que para todo $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^d : Mf(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\{x:|f(x)|\geq\alpha/2\}} |f(x)|dx.$$

   (b) Probar que si $1 < p \leq \infty$, entonces $Mf \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Además existe $c_p > 0$ que no depende de f tal que $\|Mf\|_p \leq c_p\|f\|_p$.

5. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Un punto x se dice *punto de Lebesque de f* sii

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f(x)|dy \to 0 \text{ cuando } Q \searrow x$$

   Probar que casi todo punto de $\mathbb{R}^d$ es un punto de Lebesgue de f.

6. Sea $\{S\}$ una familia de conjuntos medibles. Se dice que $\{S\}$ se *contrae regularmente a x* sii

   (a) Los diámetros de los conjuntos S tienden a 0

(b) Si Q es el cubo más pequeñ o con centro en x que contiene a S, entonces existe una constante k independiente de S tal que $|Q| \leq k|S|$

Los conjuntos S no necesitan contener a x.

(a) Probar que $\{B(x,r)\}_{r>0}$ se contrae regularmente a x

(b) Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, entonces en todo punto de Lebesgue de f

$$\frac{1}{|S|}\int_S |f(y) - f(x)|dy \to 0$$

para toda familia $\{S\}$ que se contrae regularmente a x.

7. Sea ϕ definida sobre $\mathbb{R}^d$ una función medible y acotada tal que $sop(\phi) \subseteq \{x : |x| \leq 1\}$ y $\int_{\mathbb{R}^d} \phi dx = 1$. Para cada $\epsilon > 0$, sea $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-d}\phi(x/\epsilon)$. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, probar que:

$$\lim_{\epsilon \to 0}(f * \phi_\epsilon)(x) = f(x),$$

si x es un punto de Lebesgue de f.

8. Hallar $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ creciente, continua y tal que

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$

9. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Probar:

(a) F es absolutamente continua.

(b) F es derivable en casi todo punto y $F'(x) = f(x)$.

10. Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente y absolutamente continua con $g(a) = c$ y $g(b) = d$.

(a) Si $G \subseteq [c,d]$ es abierto, entonces $|G| = \int_{g^{-1}(G)} g'(x)dx$.

(b) Sea $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$. Si $E \subseteq [c,d]$ y $|E| = 0$ entonces $g^{-1}(E) \cap H$ tiene medida nula.

(c) Si $E \subseteq [c,d]$ es medible, entonces $F = g^{-1}(E) \cap H$ es medible y $|E| = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x))g'(x)dx$.

(d) Si f es medible y no negativa sobre $[c,d]$, entonces $(f \circ g)g'$ es medible sobre $[a,b]$ y $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$.

11. Sean $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, absolutamente continua en $[a,b]$, g integrable sobre $[a,b]$ y
$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)dt.$$
Probar que:
$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)dx.$$