ANALISIS REAL.

Segundo Cuatrimestre de 2005

PRACTICA 7 : MEDIDA EN ESPACIOS ABSTRACTOS.

1. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:
   (a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.
   (b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

2. Sean X un conjunto y $A_1, \dots, A_N$ subconjuntos disjuntos de X tal que $\cup_{i=1}^N A_i = X$. Sea Σ la $\sigma-$álgebra generada por $\{A_1, \dots, A_N\}$. Probar:
   (a) $B \in \Sigma$ si y sólo si existen $i_1, \dots, i_k$ tales que $B = \cup_{j=1}^k A_{ij}$.
   (b) Si f es $\Sigma-$medible, entonces f es constante sobre cada A_i.

3. Teorema de Egorov: Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k\geq 1}$ converge a.e. en E a un límite finito. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E \backslash A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge uniformemente en A.

4. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y si f y f_k son medibles y finitas a.e. en un conjunto medible E, entonces $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en medida sobre E a f ($f_k \overset{m}{\to} f$) si para cada $\epsilon > 0$,
   $$\lim_{k\to\infty} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\}) = 0.$$
   Probar:
   (a) Si $f_k \to f$ a.e. sobre E y $\mu(E) < \infty$, entonces $f_k \overset{m}{\to} f$ sobre E.
   (b) Si $f_k \overset{m}{\to} f$ sobre E, existe una subsucesión $(f_{k_j})_{j\geq 1}$ tal que $f_{k_j} \to f$ a.e. en E.

5. Sea (X, Σ, μ) espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles y finitas a.e. Decimos que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \Sigma$ tal que:
   $$\mu(A_\epsilon) < \epsilon \ \text{ y } \ f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f \text{ en } X \backslash A_\epsilon.$$
   Probar que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, $(f_n)_{n\geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

6. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ no negativa e integrable. Definimos $\mu(A) = \int_A g(x)dx$, para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible Lebesgue. Entonces:
   $$f_n \overset{m}{\to} f \qquad \Rightarrow \qquad f_n \overset{\mu}{\to} f.$$

7. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y μ y ν dos medidas sobre Σ tales que $\mu(A) \leq \nu(A)$, para todo $A \in \Sigma$. Probar que

$$f \in L^1(X, \nu) \qquad \Rightarrow \qquad f \in L^1(X, \mu).$$

8. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.

   (a) Si $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to 0$, probar que $f_n \overset{m}{\to} 0$.

   (b) Si $\mu(X) < \infty$ y $f_n \overset{m}{\to} 0$, probar que $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to 0$.

9. Sean $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = P(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = \sharp(A)$ (cardinal de A). Probar que $f \in L^1(\mathbb{N}, \mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

10. Sean $X = \mathbb{N}$ y μ la medida sobre $\mathbb{N}$ tal que: $\mu(E) = \sum_{n:n\in E} \frac{1}{n^2}$.

    (a) Probar que μ es una medida finita.

    (b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $f_k : X \to \mathbb{R}$,

    $$f_k(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad 1 \leq n \leq k \\ 0 & , \quad k < n. \end{cases}$$

    Probar que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en μ–medida.

    (c) Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. ¿Para qué valores de $p \geq 1$, resulta $f \in L^p(X, \mu)$?

11. Sean (X, Ω, ν) un espacio de medida finita y $\varphi : X \to \mathbb{R}_{>0}$ una función ν–medible. Probar que:

    (a) si φ es medible entonces está definida $\int_X \varphi \ln(\varphi)\, d\nu$,

    (b) si φ pertenece a $L^2(X, d\nu)$ entonces $\varphi \ln(\varphi)$ pertenece a $L^1(X, d\nu)$.

12. Sean $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ espacio medible, $\mu : \mathcal{F} \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ que satisface:

    (a) $A, B \in \mathcal{F} \ \wedge \ A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

    (b) $A_n \in \mathcal{F}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\wedge$ $A_n \searrow \emptyset \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$.

    Probar que μ es una medida.

13. Sean $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\varphi : [0, 1) \to S^1$, $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$. En S^1 se considera la $\sigma-$álgebra

    $$\mathcal{A} = \{A \subseteq S^1 : \varphi^{-1}(A) \text{ es medible Lebesgue}\}$$

    y la medida m sobre $\mathcal{A}$ definida por:

    $$m(A) = |\varphi^{-1}(A)|.$$

Dada $f : S^1 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, tal que $f \circ \varphi$ es medible Lebesgue, probar que f es $\mathcal{A}-$medible y

$$\int_{S^1} f\ dm = \int_0^1 f \circ \varphi\ dt.$$

Medidas con signo

14. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \Sigma$, probar:

    (a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

    (b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

15. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f tal que existe $\int_X f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu$ $(E \in \Sigma)$. Probar que:

    (a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu$ $(E \in \Sigma)$,

    (b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$ $(E \in \Sigma)$.

16. (a) Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar:

    $$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \mu(E) < \delta\ \Rightarrow\ \lambda(E) < \epsilon.$$

    (b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0, 1)$ medible Lebesgue.)

17. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

    (a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu$ $(B \in \Sigma_2)$, entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2, absolutamente continua con respecto a μ. Deducir que existe g Σ_2-medible tal que:

    $$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \qquad (B \in \Sigma_2).$$

    (b) Si $\Sigma_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \Sigma_1$, determinar la función g del inciso anterior.

18. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, M, \delta)$ donde M es la $\sigma-$álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

    $$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

(a) Probar que no existe $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x)dx \qquad (\forall A \in M).$$

¿Encierra esto alguna contradicción?

(b) Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ.

(c) Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, hallar $\int_{\mathbb{R}^n} f d\delta$.

19. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio de medida (X, Σ). Si para todo $\epsilon > 0$, existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \phi,\ A_\epsilon \cup B_\epsilon = X,\ \mu(A_\epsilon) < \epsilon \ \text{ y } \ \nu(B_\epsilon) < \epsilon;$$

entonces existen $A \in \Sigma$ y $B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \phi,\ A \cup B = X,\ \mu(A) = 0 \ \text{ y } \ \nu(B) = 0.$$

20. Para cada medida de Borel finita ν sobre $\mathbb{R}$, se define $f_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$f_\nu(x) = \nu((-\infty, x)).$$

Probar:

(a) f_ν es monótona creciente, acotada, continua por izquierda y

$$\lim_{x \to -\infty} f_\nu(x) = 0.$$

(b) f_ν es continua en $x_0 \ \Leftrightarrow\ \nu(\{x_0\}) = 0$.

(c) Si $\mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue,

$$\nu \ll \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad f_\nu \text{ es una función absolutamente continua.}$$

21. Sea μ la medida de contar en $\mathbb{R}$ y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe f tal que

$$m(E) = \int_E f d\mu.$$

¿Contradice esto algún teorema conocido?

22. Sean (X, Σ) un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada definidas en Σ, tales que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in \mathrm{L}^1(\mu)$ tal que

$$\int f d\nu = \int fg d\mu \qquad \forall f \text{ medible .}$$

(b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

23. Sea (X, Σ) un espacio de medida. Sean μ y ν dos medidas finitas en ese espacio. Definamos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por $\overline{\mu} = \mu + \nu$.

    (a) Probar que existe una función $f \in L^1(\overline{\mu})$ tal que $\nu(E) = \int f d\overline{\mu}$ y que $0 \leq f(x) < 1$ para μ-casi todo x.

    (b) Deducir que $\int g d\nu = \int g f d\overline{\mu}$ para toda $g \geq 0$ medible.

    (c) Si, además, $\nu(E) = \int_E h d\mu$ para todo $E \in \Sigma$ entonces $h(x) = \dfrac{f(x)}{1 - f(x)}$ para μ-casi todo $x \in X$.
    Sugerencia: reescribir el item (b) como $\int g(1-f)d\nu = \int g f d\mu$ y elegir una g adecuada.