1	2	3	4	Calif.

Nombre y Apellido:

12 de Mayo de 2006

Análisis Real - Medida y Probabilidad. Primer Parcial
Primer cuatrimestre de 2006

1. Sea $\alpha \in (0,1)$ y sea $\tau : [0,1) \to [0,1)$ dada por:

$$\tau(x) = \begin{cases} x+\alpha & \text{si } x \in [0, 1-\alpha) \\ x+\alpha-1 & \text{si } x \in [1-\alpha, 1). \end{cases}$$

   a) Probar que si $E \subset [0,1)$ es medible, entonces $\tau^{-1}(E)$ es medible y $|\tau^{-1}(E)| = |E|$.

   b) Probar que si $f : [0,1) \to \mathbb{R}$ es integrable, entonces $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f \circ \tau$.

2. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida finita. Sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables. Probar que son equivalentes:

   (i) $(f_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión fundamental en medida y, además, cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que:

$$A \in \Sigma, \quad \mu(A) < \delta \implies \sup_{n\geq 1} \int_A |f_n| \, d\mu < \varepsilon.$$

   (ii) $\displaystyle\lim_{n,m\to\infty} \int |f_n - f_m| \, d\mu = 0.$

3. Probar que no existe ninguna función $\phi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrable y tal que

$$nxe^{-nx^2} \leq \phi(x) \qquad \forall x \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$$

4. Sean(X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean f_n, f funciones medibles y finitas tales que $f_n \xrightarrow{\mu} f$. Probar que para todo $a \in \mathbb{R}$ se satisface:

$$\mu(\{x \in X : f(x) > a\}) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : f_n(x) > a\})$$

Justificar todas las respuestas. Enunciar todas las hipótesis de los teoremas usados.