ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2006.

PRACTICA 0

1. Sean $(X_i)_{i\in I}$ y $(Y_i)_{j\in J}$ dos familias de conjuntos. Probar:

   (a) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \bigcup \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cup Y_j)$

   (b) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \bigcap \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \cap Y_j)$

   (c) $\left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcap_{j\in J} Y_j\right) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$

   (d) $\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \times \left(\bigcup_{j\in J} Y_j\right) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} (X_i \times Y_j)$

   (e) Si $I = J$ y $\forall\ i \in I$ se tiene $Y_i \subset X_i$ entonces
   $$\left(\bigcup_{i\in I} Y_i\right) \subset \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \text{ y } \left(\bigcap_{i\in I} Y_i\right) \subset \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right)$$

   (f) Si $A \subset I$ entonces
   $$\left(\bigcup_{i\in A} X_i\right) \subset \left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \text{ y } \left(\bigcap_{i\in I} X_i\right) \subset \left(\bigcap_{i\in A} X_i\right)$$

   (g) Para cada conjunto F se tiene:
   $$F - \bigcup_{i\in I} X_i = \bigcap_{i\in I}(F - X_i) \text{ y } F - \bigcap_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(F - X_i)$$

   (h) Encontrar conjuntos A_{nk} $(n, k \in \mathbb{N})$ tales que:
   $$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{nk} \neq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{nk}$$

2. Sean $(J_l)_{l\in L}$ y $(X_i)_{i\in I}$ dos familias de conjuntos tales que $I = \bigcup_{l\in L} J_l$. Probar:

   (a) $\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{l\in L} \left(\bigcup_{i\in J_L} X_i\right)$

   (b) $\bigcap_{i\in I} X_i = \bigcap_{l\in L} \left(\bigcap_{i\in J_L} X_i\right)$

3. Si $A \times B = (A_1 \times B_1) \cup (A_2 \times B_2)$ con $(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = \emptyset$, $A_1 \times B_1 \neq \emptyset$ y $A_2 \times B_2 \neq \emptyset$ entonces

$$(A = A_1 = A_2 \text{ y } B = B_1 \cup B_2) \text{ ó } (A = A_1 \cup A_2 \text{ y } B_1 = B_2 = B).$$

4. Sean $f : E \to F,\ A \subset E,\ B \subset E,\ C \subset F,\ D \subset F$. Probar:
   (a) $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$
   (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
   (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
   (d) si f es inyectiva $\Rightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
   (e) $A \subset f^{-1}(f(A))$ y $f(f^{-1}(D)) \subset D$
   (f) si f es inyectiva $\Rightarrow f(E - A) \subset F - f(A)$
   (g) si f es suryectiva $\Rightarrow f(E - A) \supset F - f(A)$
   (h) $f^{-1}(F - B) = E - f^{-1}(B)$

5. Sea $f : E \to F$ una función. Sean $(X_i)_{i \in I}$ y $(Y_j)_{j \in J}$ dos familias de subconjuntos de E y F respectivamente. Probar:
   (a) $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$
   (b) $f(\bigcap_{i \in I} X_i) \subset \bigcap_{i \in I} f(X_i)$
   (c) si f es inyectiva $\Rightarrow f(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} f(X_i)$
   (d) $f^{-1}(\bigcap_{j \in J} Y_j) = \bigcap_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$
   (e) $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} Y_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(Y_j)$

6. Dada una sucesión $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de E, se define:

$$\underline{lim}\ E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} E_k \quad \text{(límite inferior)}$$

$$\overline{lim}\ E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} E_k \quad \text{(límite superior)}$$

   Probar:
   (a) $E - \underline{lim}\ E_n = \overline{lim}\ (E - E_n)$
   (b) $E - \overline{lim}\ E_n = \underline{lim}\ (E - E_n)$
   (c) $\underline{lim}\ E_n \subset \overline{lim}\ E_n$
   Si $\underline{lim}\ E_n = \overline{lim}\ E_n$, entonces se dice que existe el límite de la sucesión E_n y a este conjunto se lo denota por $lim\ E_n$. Probar:
   (d) Si $E_{n+1} \subset E_n \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow lim\ E_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n$
   (e) Si $E_n \subset E_{n+1} \forall\ n \in \mathbb{N} \Rightarrow lim\ E_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$
   (f) Dada una sucesión de subconjuntos de E se define:

$$\begin{cases} D_0 = \emptyset \\ D_{n+1} = D_n \triangle E_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

   Probar que existe $lim\ D_n$ si y sólo si $lim\ E_n = \emptyset$.

7. Sean A y B subconjuntos de un conjunto X, se define:

   $\chi_A : X \to \{0,1\}$ como
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

   (a) $A \subset B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \ \forall\ x \in X$
   (b) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x) \ \ \forall\ x \in X$
   (c) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) \ \ \forall\ x \in X$

8. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $f : X \to Y$. Probar:

   (a) $f(\underline{lim}\ E_n) \subset \underline{lim}\ f(E_n)$
   (b) $f(\overline{lim}\ E_n) \subset \overline{lim}\ f(E_n)$
   (c) $f(\underline{lim}\ E_n) \subset \overline{lim}\ f(E_n)$
   (d) Si f es inyectiva, en (a) y (b) vale la igualdad.

9. Sea E un conjunto y $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ tal que si:
$$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B).$$
   Sean
$$V = \bigcap\{Z \subset E :\ f(Z) \subset Z\},$$
$$W = \bigcup\{Z \subset E :\ f(Z) \supset Z\}.$$
   Probar que:

   (a) $f(V) = V$ y $f(W) = W$
   (b) Sea $A \subset E$ tal que $f(A) = A \Rightarrow V \subset A \subset W$

10. Probar las siguiente propiedades de la suma de cardinales:

   (a) $a + b = b + a$
   (b) $(a + b) + c = a + (b + c)$
   (c) $a + 0 = a$
   (d) si $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

11. Probar las siguientes propiedades del producto de cardinales:

   (a) $a.b = b.a$
   (b) $a(b.c) = (a.b).c$
   (c) $a.\overline{0} = \overline{0}$
   (d) $a.\overline{1} = a$
   (e) Si $a \leq b \Rightarrow a.c \leq b.c$
   (f) $a.(b + c) = a.b + a.c$

12. Probar las siguientes propiedades de la potenciación de cardinales:

   (a) si $a \neq 0 \Rightarrow a^{\overline{0}} = \overline{1}$

(b) $\overline{0}^b = \overline{0}$ si $b \neq 0$. ¿ qué sucede si $b = \overline{0}$?

(c) $a^{b+c} = a^b.a^c$

(d) $a^{bc} = (a^b)^c$

13. Sea $a = \sharp X$ entonces

    (a) $\sharp \mathcal{P}(X) = \overline{2}^a$

    (b) $a \leq \overline{2}^a$

    (c) $a < \overline{2}^a$

14. Sean a y b cardinales tales que : $a^2 = a$ y $b \leq a$ entonces

    (a) si $\overline{1} \leq b \Rightarrow b.a = a$,

    (b) si $\overline{2} \leq a \Rightarrow b + a = a$.