ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2006

PRACTICA 2 : MEDIDA EN ESPACIOS ABSTRACTOS Y FUNCIONES MEDIBLES.

1. Sea X un conjunto no vacío.

   (a) Para cada $E \subset X$, definimos $\mu(E) = \text{card}(E)$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ es una medida definida en $\Sigma = \mathcal{P}(X)$. Esta medida se suele llamar medida de contar o *counting measure*.

   (b) Dado $x_0 \in X$. Si $E \subset X$, definimos $\delta(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que δ es una medida en $\mathcal{P}(X)$. Esta medida suele llamarse delta de Dirac.

   (c) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $A \in \Sigma$. Para cada $E \in \Sigma$ definimos $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_A es una medida en Σ.

   (d) Sea (X, Σ) un espacio medible. Sean $\mu_1, \ldots, \mu_n$ medidas definidas en ese espacio y sean $a_1, \ldots, a_n$ constantes positivas. Probar que
   $$\mu = a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n$$
   es una medida.

   (e) Sea (X, Σ) un espacio medible. Sea $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de medidas en ese espacio. Supongamos que la sucesión es monótona creciente, en el sentido de que $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ para todo $E \in \Sigma$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si definimos, para cada $E \in \Sigma$,
   $$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E),$$
   entonces μ es una medida.

   (f) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Para cada $E \in \Sigma$ definimos
   $$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E, \mu(F) < \infty\}.$$
   Probar que μ_0 es una medida. Probar además que cumple la siguiente propiedad: para cada $E \in \Sigma$ existe un conjunto $F \in \Sigma$ contenido en E y de medida finita.

2. Sean (X, Σ) un espacio medible. Sea la función de conjuntos $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

   (a) $A, B \in \Sigma \;\wedge\; A \cap B = \emptyset \;\Rightarrow\; \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

   (b) $A_n \in \Sigma \; (n \in \mathbb{N}) \;\wedge\; A_n \searrow \emptyset \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$

   Probar que μ es una medida.

3. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma$, $Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si $E_1, E_2 \in \Sigma$ y $\mu(E_1 \vartriangle E_2) = 0$ entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

4. Teorema de Egorov: Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k \geq 1}$ converge a.e. en E a un límite finito. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E \backslash A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k \geq 1}$ converge uniformemente en A.

5. Sea (X, Σ, μ) espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ y f funciones finitas a.e. Decimos que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \Sigma$ tal que:

$$\mu(A_\epsilon) < \epsilon \ \text{ y } \ f_n \rightrightarrows f \text{ en } X \backslash A_\epsilon.$$

Probar que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, $(f_n)_{n \geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

6. Revisar los ejercicios 4,5 y 9 de la práctica 1 y decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones en un espacio de medida (X, Σ, μ).

   (a) Si $E, F \in \Sigma$ entonces $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

   (b) Supongamos que $X = \mathbb{R}^d$. Si $E \in \Sigma$ entonces $\mu(E) = \mu(E + v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^d$.

   (c) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j)$

   (d) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j)$

7. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$. Notemos con B a la σ–álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Probar:

   (a) Si f es una función medible en Σ, entonces $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para todo $B \in \mathrm{B}$.

   (b) Si $\overline{\mathrm{B}} = \{E = B \cup A,\ B \in \mathrm{B} \text{ y } A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces, f es medible si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\mathrm{B}}$.

8. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida.

   (a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\} \in \Sigma$ es medible. ¿Es f medible?

   (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f|$ es medible. ¿Es f medible?

9. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Entonces:

   (a) Si f es monótona, entonces f es medible Borel.

   (b) Si f es derivable sobre $\mathbb{R}$, entonces f' es medible Borel.

10. Si $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible Lebesgue, entonces existe $g : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ a.e.

11. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$ continua en casi todo punto. Probar que f es medible Lebesgue.

12. (a) Hallar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua a.e., tal que no existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua que verifica: $f = g$ a.e.

    (b) Hallar $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que g es continua, $g = f$ a.e. y f es discontinua en todo punto.

13. Sea I un intervalo de $\mathbb{R}^d$.

    (a) Sea $E \subseteq I$ medible Lebesgue. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g : I \to \mathbb{R}$ continua tal que
    $$|\{x \in I : g(x) \neq \chi_E(x)\}| < \epsilon.$$

    (b) Sea φ una función simple definida sobre I. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g : I \to \mathbb{R}$ continua tal que
    $$|\{x \in I : g(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon.$$

    (c) Sea $f : I \to \overline{\mathbb{R}}$ medible Lebesgue y finita en c.t.p. Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe φ simple tal que
    $$|\{x \in I : |\varphi(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

    (d) Sea f como en (c). Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe g continua tal que
    $$|\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

14. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sea $(f_k)_{k\geq 1} : E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:
    $$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathbb{N} .$$
    Probar que si para todo $\alpha > 0$, existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$:
    $$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \mu\left(\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}\right) \leq \alpha/k,$$
    entonces $\mu(E) = 0$.

15. Sea E un subconjunto de $\mathbb{R}^d$ con medida de Lebesgue finita y $(f_k)_{k\geq 1} : E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:
    $$|f_k(x)| \leq M_x \qquad , \qquad \forall k \in \mathbb{N} .$$
    Probar que dado $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado y $M > 0$:
    $$|E \backslash F| < \epsilon \quad \text{y} \quad |f_k(x)| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N} , \quad \forall x \in F.$$

16. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$; $f_n(x) = n\ \chi_{[1/n, 2/n]}(x)$. Probar

(a) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge puntualmente,

(b) para cada $\delta > 0, (f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en $[\delta, \infty)$,

(c) no existe $E \subset [0, \infty)$ tal que $|E| = 0$ y $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformemente en E^c.

17. (a) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$ un subconjunto de X tal que $\mu(E) < \infty$. Sean $(f_n)_{n\geq 1} : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, finitas en casi todo punto de E y tales que $f_n \to_{n\to\infty} f$ a.e. en E. Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i\geq 1}$ de conjuntos medibles de E tal que:

    i. $\mu\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0$,

    ii. para cada $i \geq 1, f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow}_{n\to\infty} f$ en E_i.

    (b) El mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde $\mu(A_k) < \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

18. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles definidas sobre un conjunto $A \in \Sigma$ y finitas en c.t.p.. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de A tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \Sigma$ y $\mu\left(A \setminus A_n\right) \to_{n\to\infty} 0$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

19. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Supongamos que $f_k \xrightarrow{\mu} f$ y $g_k \xrightarrow{\mu} g$. Probar:

    (a) $f_k + g_k \xrightarrow{\mu} f + g$ sobre E.

    (b) Si μ es finita, entonces $f_k g_k \xrightarrow{\mu} fg$ sobre E. Mostrar que la hipótesis de finitud es necesaria.

    (c) Sea $(f_k/g_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en casi todo punto de E. Si $\mu(E) < +\infty$, $g_k \to g$ sobre E y $g \neq 0$ a.e., entonces $f_k/g_k \xrightarrow{\mu} f/g$.

20. Sea $f_1 : [0, 1] \to [0, 1]$ la función de Cantor–Lebesgue y $f : [0, 1] \to [0, 2]$ definida por: $f(x) = f_1(x) + x$.

    (a) f es continua y biyectiva. Además f^{-1} es continua.

    (b) Si C es el Ternario de Cantor, $|f(C)| = 1$.

    (c) Sea $g = f^{-1}$. Mostrar que existe A medible tal que $g^{-1}(A)$ es no medible.

    (d) Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.

    (e) Hallar $h_1 : [a, b] \to \mathbb{R}$ medible Borel y $h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.

21. Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es s.c.s. (s.c.i., continua) entonces f es medible borel.