ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2006

PRACTICA 3 : INTEGRAL DE LEBESGUE.

1. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible y no negativa. Probar que si $E \in \Sigma$ entonces:

$$\int_E f\ d\mu = \sup \left\{ \int_E \varphi\ d\mu : \quad 0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi \text{ simple} \right\}.$$

2. Sea $(\mathbb{R}^d, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida y sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrable sobre $\mathbb{R}^d$. Probar que si $Q_n = [-n, n]^d, (n \in \mathbb{N})$, entonces,

$$\int_{Q_n^c} |f|\ d\mu \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

3. (a) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ integrable (Lebesgue). Probar que existe $(x_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

   (b) Mostrar que existe g integrable sobre $[0, \infty)$, continua y tal que para una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$, se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \infty.$$

4. Sean $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible, $v \in \mathbb{R}^d$ y $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible.

   (a) Si $f \geq 0$ entonces:

$$\int f(x+v)dx = \int f(x)dx \quad \text{y} \quad \int_E f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx.$$

   (Sug.: $\int_E f dx = \int_{\mathbb{R}^p} f\chi_E dx$.)

   (b) Si f es integrable sobre $\mathbb{R}^p$, valen para f las mismas afirmaciones.

5. Sea $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que para todo $a > 0$ vale la igualdad:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{x}{a}\right)\ dx \quad = \quad a^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

6. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida completo. Sea $E \in \Sigma$ y sea $f : E \to \mathbb{R}$ integrable. Probar que si $\left|\int_E f\ d\mu\right| = \int_E |f|\ d\mu$, entonces $f \geq 0$ a.e. en E ó $f \leq 0$ a.e. en E.

7. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida completo. Sea $E \in \Sigma$ y sea $f : E \to \mathbb{R}$ medible. Si $\int_A f d\mu = 0$ para todo conjunto medible $A \subseteq E$, probar que $f = 0$ a.e. en E.

8. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre un conjunto $E \in \Sigma$. Si $\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x)$ para cada $x \in E$ y $f_k \leq f$ a.e., probar que

$$\int_E f d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E f_k d\mu.$$

9. Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.

10. Mostrar que en el Lema de Fatou, la hipótesis que las funciones de la sucesión son no negativas, es necesaria.

11. Sea $(\mathbb{R}^d, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida. Sea $E \in \Sigma$ y sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre E y f integrable sobre E. Si $\int_E |f_n - f| d\mu \longrightarrow_{n\to\infty} 0$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$ sobre E.

12. Sea $(\mathbb{R}^d, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida. Sea $E \in \Sigma$ y sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones. Sea $p > 0$ tal que $\int_E |f_n - f|^p dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0$. Probar que si $\int_E |f_n|^p d\mu \leq M$ para todo n, entonces $\int_E |f|^p d\mu \leq M$.

13. Si $f \in L^1(0,1)$, mostrar que $x^n f(x) \in L^1(0,1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

14. (a) Sea (X, Σ, μ), sea $E \in \Sigma$ y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de funciones medibles y no negativas sobre E con f_1 integrable en E. Mostrar que:

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu < \infty.$$

(b) Sea $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mostrar que:

$$\lim_{n\to\infty} n(x^{1/n} - 1) = \ln x,$$

considerando la función $f_n(t) = t^{(1/n)-1}$ para $1 < t < x$.

15. Sea $g(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, definida en $(0,1)$ y f su derivada. Probar que f es continua en $(0,1)$, existe $\lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^1 f(x)dx$, pero $f \notin L^1(0,1)$. *(Sug.: $|f(x)| \geq (2/x)|\cos(1/x^2)| - 2x \geq 1/2x$ para x tal que $[(2n+1/3)\pi]^{-1/2} \leq x \leq [(2n-1/3)\pi]^{-1/2}, n \in \mathbb{N}$).*

16. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $E \in \Sigma$ y sea $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre E. Probar que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty,$$

entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente en casi todo punto de E y

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

17. Sean $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}; f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$. Probar que:

$$\int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx \;\neq\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n(x)dx.$$

Verificar que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} |f_n(x)|dx \;=\; \infty.$$

18. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^d$ medible y $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ medible. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$. Entonces:

    (a) f integrable sobre $E \;\Rightarrow\; \sum_{n\geq 1} |E_n| < \infty$.

    (b) Si E es de medida finita,

    $$\sum_{n\geq 1} |E_n| < \infty \;\Rightarrow\; f \text{ integrable sobre } E.$$

19. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre E y f medible tales que $f_n \xrightarrow{\mu} f$ sobre E. Si existe g integrable sobre E tal que $|f_n| \leq g$ sobre E, entonces f es integrable y $\int_E |f_n - f| d\mu \longrightarrow_{n\to\infty} 0$.

20. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que:

    (a) para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto f(x,y)$ es integrable sobre $[0,1]$ y

    (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es una función de (x,y) acotada.

    Probar:

    (a) para todo $x \in [0,1]$, la función $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ es medible y

    (b) $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy$.

21. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^p$ medible. Sean $f_n, f : E \to [0,1]$ medibles y tales que $f_n \overset{m}{\to} f$. Dada $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua, probar:

   (a) $\phi(f_n) \overset{m}{\to} \phi(f)$,

   (b) si $|E| < \infty$, entonces $\phi(f_n) \to \phi(f)$ en $L^1(E)$.

22. Sea $g : [0,1] \to R$ medible, $g(x) \geq 0$ para casi todo $x \in [0,1]$ e integrable sobre $[0,1]$. Probar que si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale la igualdad:
$$\int_0^1 g(x)^n dx = \alpha,$$
entonces $g = \chi_E$ a. e. para algún conjunto $E \subseteq [0,1]$ medible.

23. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.

   (a) Si $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to 0$, probar que $f_n \overset{\mu}{\to} 0$.

   (b) Si $\mu(X) < \infty$ y $f_n \overset{\mu}{\to} 0$, probar que $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to 0$.

24. Sean $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = P(\mathbb{N})$ y $\mu(A) = \sharp(A)$ (cardinal de A). Probar que $f \in L^1(\mathbb{N}, \mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

25. Sean $X = \mathbb{N}$ y μ la medida sobre $\mathbb{N}$ tal que: $\mu(E) = \displaystyle\sum_{n:n\in E} \frac{1}{n^2}$.

   (a) Probar que μ es una medida finita.

   (b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $f_k : X \to \mathbb{R}$,
$$f_k(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad 1 \leq n \leq k \\ 0 & , \quad k < n. \end{cases}$$
   Probar que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en μ–medida.

   (c) Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. ¿Para qué valores de $p \geq 1$, resulta $f \in L^p(X, \mu)$?

26. Sean (X, Ω, ν) un espacio de medida finita y $\varphi : X \to \mathbb{R}_{>0}$ una función ν–medible. Probar que:

   (a) si φ es medible entonces está definida $\int_X \varphi \ln(\varphi)\, d\nu$,

   (b) si φ pertenece a $L^2(X, d\nu)$ entonces $\varphi \ln(\varphi)$ pertenece a $L^1(X, d\nu)$.