ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2006

PRACTICA 4 : TEOREMA DE FUBINI.

1. (a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula.

   (b) Sea $f(x, y)$ una función medible y no negativa definida sobre $\mathbb{R}^2$. Supongamos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y. Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x.

2. Sean f y g funciones medibles definidas sobre $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre $\mathbb{R}^{n+m}$ es medible. Deducir que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$ es medible en $\mathbb{R}^{n+m}$ y $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

3. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ medible. Si $h : (0, 1) \times (0, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$ es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

4. Sean $I = [0, 1]$ y $E \subseteq I \times I$ tales que:
$$|E_x|_e = |I \setminus E_y|_e = 0, \qquad \forall (x, y) \in I \times I.$$
   Probar que E no es medible.

5. Usar el Teorema de Fubini para probar la igualdad:
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

6. Sea $E \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto medible y sea $f : E \to \mathbb{R}$ una función medible y no negativa. Definimos
$$O_E(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq t < f(x)\}.$$

   (a) Si f es una función simple entonces $O_E(f)$ es un conjunto medible en $\mathbb{R}^{d+1}$.

   (b) Si $f_n : E \to \mathbb{R}$ es una sucesión creciente de funciones medibles y no negativas que convergen a f entonces $O_E(f_n) \nearrow O_E(f)$, es decir,
$$O_E(f_n) \subset O_E(f_{n+1}) \qquad \text{y} \qquad \bigcup O_E(f_n) = O_E(f).$$

(c) Deducir que $O_E(f)$ es medible.

(d) Probar que $\int_E f(x)dx = |O_E(f)|$.

7. Sean (X_1, Σ_1) y (X_2, Σ_2) dos espacios medibles. Para $i = 1, 2$ sea $P_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ la proyección sobre X_i dada por $P_i(x_1, x_2) = x_i$.

   (a) Probar que si $E_i \in \Sigma_i$ entonces $P_i^{-1}(E_i) \in \Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

   (b) Probar que si Σ es una σ-álgebra en $X \times Y$ tal que $P_1^{-1}(E) \in \Sigma$ para todo $E \in \Sigma_1$ y $P_2^{-1}(E) \in \Sigma$ para todo $E \in \Sigma_2$, entonces $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2 \subset \Sigma$.

8. Notemos con $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ la σ-álgebra de borel en $\mathbb{R}$ y con $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2}$ la σ-álgebra de borel en $\mathbb{R}^2$. Probar que $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^2} = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$.

9. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $E \in \Sigma$ y sea f una función medible y no negativa definida en E.

   Probar que el conjunto

$$O_E(f) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : x \in E, 0 \leq t < f(x)\},$$

   es medible en $\Sigma \otimes \mathfrak{B}$. Si m denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ probar que $(\mu \times m)(O_E(f)) = \int_E f \, d\mu$.

10. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, sea $E \in \Sigma$ y sea f una función medible y no negativa definida sobre E. Para cada $\alpha > 0$, se define

$$\omega(\alpha) = \mu\left(\{x \in E : f(x) > \alpha\}\right).$$

   La función ω se llama <u>distribución de f sobre E</u>. Probar:

   (a) $\omega : (0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función decreciente.

   (b) $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.

   (c) $\omega(\alpha-) \geq \mu(\{x \in E : f(x) \geq \alpha\})$.

   (d) ω continua en $\alpha \Rightarrow \mu\left(\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}\right) = \mu\left(\{x \in E : f(x) > \alpha\}\right)$.

   (e) Para cada $\alpha \in (0, \infty)$, probar que:

$$\{x : (x, \alpha) \in O_E(f)\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}.$$

   (f) Probar que: $\int_E f = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$. (Sug.: Usar el ejercicio 9 y el Teorema de Tonelli).

   (g) Para cada $p : 0 < p < \infty$, probar que:

$$\int_E f^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

11. Dada $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ medible tal que para algún $\alpha \in (0, 1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha/(1+t)$ para todo $t \geq 0$, consideramos la funci'on $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, definida por $G(x, t) = e^{-xt} f(t)$. Demostrar:

    (a) G es medible.

    (b) $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$.

12. Definimos $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ k(x, y) = x.y$. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible, entonces $h(x, y) = f(x.y)$ es medible.

13. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles. Probar que la función $h(x) = |(A - x) \cap B|$ es medible y $\int_{\mathbb{R}} h(x)dx = |A||B|$.

14. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

15. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

    (a) Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^d$, la función $e^{-2\pi i <\xi, x>} f(x)$ (donde $< \xi, x >= \sum_{i=1}^d \xi_i x_i$,) es medible e integrable.
    Se define la <u>Transformada de Fourier de f</u> como:

    $$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i <\xi, x>} f(x)dx, \qquad (\xi \in \mathbb{R}^d).$$

    (b) Probar:

    i. $\hat{f}$ es acotada y uniformemente continua.

    ii. $\hat{f}(\xi) \longrightarrow_{|\xi| \to \infty} 0$, (Lema de Riemman–Lebesgue).

    iii. Si $f(x) = f_1(x_1) \dots f_d(x_d)$, donde cada $f_k \in L^1(\mathbb{R}), \ 1 \leq k \leq d$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_d(\xi_d)$.

    iv. Si $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $(f * g)^\wedge = \hat{f}\hat{g}$.