ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2006

PRACTICA 5 : ESPACIOS L^p.

1. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$ un conjunto de medida finita. Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$.

   (a) Probar que $L^{p_2}(E, d\mu) \subseteq L^{p_1}(E, d\mu)$.

   (b) Mostrar que $\mu(E) < \infty$ es una condición necesaria para la inclusión.

2. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, $E \in \Sigma$ y $1 \leq r \leq p \leq s < \infty$. Si $f \in L^r(E, d\mu) \cap L^s(E, d\mu)$, entonces $\|f\|_p^p \leq \|f\|_r^r + \|f\|_s^s$.

3. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Probar que:

   (a) Si $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en $L^p(E, d\mu)$, para algún $p : 1 \leq p \leq \infty$, entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$ sobre E.

   (b) Supongamos que $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en $L^p(E, d\mu)$ y $g_n \longrightarrow_{n\to\infty} g$ en $L^q(E, d\mu)$. Si $1/p + 1/q = 1$, entonces $f_n g_n \longrightarrow_{n\to\infty} fg$ en $L^1(E, d\mu)$.

   (c) Si $\mu(E) < \infty$ y $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en $L^\infty(E, d\mu)$, entonces $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en $L^p(E)$, para todo $p \geq 1$.

4. Sea Dadas las funciones $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n = \begin{cases} e^n, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

   probar que $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} 0$ a.e. y $f_n \xrightarrow{m}_{n\to\infty} 0$, pero f_n no converge en $L^p([0, 1])$ para $p : 1 \leq p \leq \infty$.

5. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f en $L^p(E, d\mu)$, para $p : 1 \leq p < \infty$. Probar:

   (a) $\|f_n - f\|_{L^p(E,d\mu)} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n\|_{L^p(E,d\mu)} \longrightarrow_{n\to\infty} \|f\|_{L^p(E,d\mu)}$.

   (b) Si $f_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} f(x)$ a.e. sobre E, entonces:

$$\|f_n\|_{L^p(E,d\mu)} \longrightarrow_{n\to\infty} \|f\|_{L^p(E,d\mu)} \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_{L^p(E,d\mu)} \longrightarrow_{n\to\infty} 0.$$

   (Sug.: Aplicar el Lema de Fatou a la sucesión: $g_n(x) = 2^{p-1}(|f_n(x)|^p + |f(x)|^p) - |f_n(x) - f(x)|^p$.)

6. Sea $k : \mathbb{R}^{d+d} \to \mathbb{R}$ medible tal que existe $c > 0$ que verifica:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \int |k(x,y)|dy \leq c \quad \text{y} \quad \sup_{y\in\mathbb{R}^d} \int |k(x,y)|dx \leq c.$$

Probar que si $1 < p < \infty$, entonces $K : L^p(R^d) \to L^p(R^d)$ dada por

$$K(f)(x) = \int k(x,y)f(y)dy$$

está bien definida y es uniformemente continua.

7. Para $1 \leq p < \infty$ y $0 < |E| < \infty$, definimos:

$$N_p[f] = \left(\frac{1}{|E|}\int_E |f|^p\right)^{1/p}.$$

Probar:

(a) $p_1 < p_2 \;\Rightarrow\; N_{p_1}[f] \leq N_{p_2}[f]$.

(b) $N_p[f+g] \leq N_p[f] + N_p[g]$.

(c) $\frac{1}{|E|}\int_E |fg| \leq N_p[f]N_{p'}[g],\; 1/p + 1/p' = 1$.

(d) $\lim_{p\to\infty} N_p[f] = \|f\|_\infty$.

8. Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida. Sea $1 \leq p < \infty$. Si $f_n \longrightarrow_{n\to\infty} f$ en $L^p(d\mu)$, $g_n(x)\longrightarrow_{n\to\infty} g(x)$ para casi todo x y, además, $\|g_n\|_{L^\infty(d\mu)} \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, probar que $f_n g_n \longrightarrow_{n\to\infty} fg$ en $L^p(d\mu)$.

9. Muestre que cuando $0 < p < 1$, los entornos $\{f \in L^p(0,1) : \|f\|_p < \varepsilon\}$ de 0, no son convexos.

10. Sea (X,Σ,μ) un espacio de medida. Sea f una función medible tal que para todo $\alpha > 0$,

$$\omega(\alpha) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}) \leq c(1+\alpha)^{-p}.$$

Probar que $f \in L^r(\mu)$, si $0 < r < p$.

11. Sea $E = [0, 1/2]$. Probar:

(a) $f(x) = x^{-1/p}(\ln x^{-1})^{-2/p} \in L^p(E),\; (1 \leq p < \infty)$, pero $f \notin L^r(E)$ si $r > p$.

(b) $g(x) = \ln x^{-1} \in L^p(E)$ para todo $p : 1 \leq p < \infty$, pero $g \notin L^\infty(E)$.

12. Sea $E = [0,\infty)$. Probar que $f(x) = x^{-1/2}(1 + |\ln x|)^{-1} \in L^2(E)$ pero $f \notin L^p(E)$ para ningún $p : 1 \leq p < \infty$, y $p \neq 2$.

13. Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^d), 1 \leq p < \infty$, probar que:

(a) $\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h)+f(x)|^p dx\right)^{1/p} \longrightarrow_{|h|\to\infty} 2^{1/p}\|f\|_p$

(b) $\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h)+f(x)|^p dx\right)^{1/p} \longrightarrow_{|h|\to 0} 2\|f\|_p$

14. (a) Dadas funciones $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ donde $1/p + 1/p' = 1$, probar que la convolución $f*g(x)$ existe y es finita para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Además define una función acotada y uniformemente continua.

    (b) Dado $E \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $0 < |E| < \infty$, probar que:

    $$E \ - \ E = \{x - y : x, y \in E\}$$

    contiene un conjunto abierto no vacío. (Sug.: considerar $\chi_E * \chi_{-E}$.)

15. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrable, para cada $h > 0$ sea

    $$f_h(t) = \frac{1}{h}\int_{t-h/2}^{t+h/2} f(x)dx.$$

    Si $f \in L^p$, probar que:

    (a) $\|f_h\|_\infty \leq h^{-1/p}\|f\|_p$.

    (b) $f_h \in L^p$ y $\|f_h\|_p \leq \|f\|_p$.

    (c) Para cada $r \geq p \geq 1$, $\|f_h\|_r \leq h^{1/r-1/p}\|f\|_p$.

    (d) $\|f_h - f\|_p \longrightarrow_{h\to 0} 0$.

16. Sean $1 < p < \infty$, $1/p + 1/p' = 1$ y $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Probar:

    (a) $\|f\|_p = \sup_{\|g\|_{p'}=1} \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)dx\right|$.

    (b) Si $(f_k)_{k\geq 1}$ es una sucesión de funciones de L^p tal que para toda $g \in L^{p'}$ resulta: $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k g dx = \int_{\mathbb{R}^d} f g dx$, entonces:

    $$\|f\|_p \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|_p.$$