ANALISIS REAL.

Primer Cuatrimestre de 2006

PRACTICA 6 : MEDIDA EN ESPACIOS ABSTRACTOS.

1. Sean μ_1 y μ_2 dos medidas sobre el espacio medible (X, Σ), tal que por lo menos una de ellas es finita. Si $\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$ $(E \in \Sigma)$, probar que ν es una medida con signo.

2. Sea ν una medida con signo. Probar:

   (a) Si P es un conjunto positivo con respecto a ν y $A \subseteq P$, entonces A es un conjunto positivo con respecto a ν.

   (b) Si $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ son conjuntos positivos con respecto a ν, entonces $\cup_{1 \leq i \leq n} P_i$ también lo es.

3. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \Sigma$, probar:

   (a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

   (b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

4. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f tal que existe $\int_X f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu$ $(E \in \Sigma)$. Probar que:

   (a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu$ $(E \in \Sigma)$,

   (b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$ $(E \in \Sigma)$.

5. (a) Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar:

   $$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \mu(E) < \delta\ \Rightarrow\ \lambda(E) < \epsilon.$$

   (b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0,1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0,1)$ medible Lebesgue.)

6. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

   (a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu$ $(B \in \Sigma_2)$, entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2, absolutamente continua con respecto a μ. Deducir que existe g Σ_2-medible tal que:

   $$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \qquad (B \in \Sigma_2).$$

(b) Si $\Sigma_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \Sigma_1$, determinar la función g del inciso anterior.

7. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, M, \delta)$ donde M es la $\sigma-$álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

   (a) Probar que no existe $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x)dx \qquad (\forall A \in M).$$

   ¿Encierra esto alguna contradicción?

   (b) Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ.

   (c) Dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible, hallar $\int_{\mathbb{R}^n} f d\delta$.

8. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio de medida (X, Σ). Si para todo $\epsilon > 0$, existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \phi, \; A_\epsilon \cup B_\epsilon = X, \; \mu(A_\epsilon) < \epsilon \;\text{ y }\; \nu(B_\epsilon) < \epsilon;$$

   entonces existen $A \in \Sigma$ y $B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \phi, \; A \cup B = X, \; \mu(A) = 0 \;\text{ y }\; \nu(B) = 0.$$

9. Para cada medida de Borel finita ν sobre $\mathbb{R}$, se define $f_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$f_\nu(x) = \nu((-\infty, x)).$$

   Probar:

   (a) f_ν es monótona creciente, acotada, continua por izquierda y

$$\lim_{x \to -\infty} f_\nu(x) = 0.$$

   (b) f_ν es continua en $x_0 \;\Leftrightarrow\; \nu(\{x_0\}) = 0$.

   (c) Si $\mathcal{L}$ es la medida de Lebesgue,

$$\nu \ll \mathcal{L} \quad \Leftrightarrow \quad f_\nu \text{ es una función absolutamente continua.}$$

10. Sea μ la medida de contar en $\mathbb{R}$ y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe f tal que

$$m(E) = \int_E f d\mu.$$

   ¿Por qué esto no contradice el Teorema de Radon Nikodym?

11. Sean (X, Σ) un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada definidas en Σ, tales que $\nu \ll \mu$.

    (a) Probar que existe una función $g \in \mathrm{L}^1(\mu)$ tal que

    $$\int f d\nu = \int f g d\mu \qquad \forall f \text{ medible .}$$

    (b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

12. Sea (X, Σ) un espacio de medida. Sean μ y ν dos medidas finitas en ese espacio. Definamos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por $\overline{\mu} = \mu + \nu$.

    (a) Probar que existe una función $f \in L^1(\overline{\mu})$ tal que $\nu(E) = \int f d\overline{\mu}$ y que $0 \leq f(x) < 1$ para μ-casi todo x.

    (b) Deducir que $\int g d\nu = \int g f d\overline{\mu}$ para toda $g \geq 0$ medible.

    (c) Si, además, $\nu(E) = \int_E h d\mu$ para todo $E \in \Sigma$ entonces $h(x) = \dfrac{f(x)}{1 - f(x)}$ para μ-casi todo $x \in X$.

    Sugerencia: reescribir el item (b) como $\int g(1-f) d\nu = \int g f d\mu$ y elegir una g adecuada.