PRÁCTICA 6: DIFERENCIACIÓN

Ejercicio 1. Sea $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ el conjunto formado por aquellas funciones medibles que son integrables sobre todo compacto $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que

(a) Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n), 1 \leq p \leq \infty$, entonces $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

(b) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ entonces f^* es semicontinua inferiormente.

Ejercicio 2. Definimos, para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$f^{**}(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f|$$

Probar que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ que dependen sólo de la dimensión, tales que

$$C_1 f^*(x) \leq f^{**}(x) \leq C_2 f^*(x)$$

es decir, f^{**} y f^* son funciones equivalentes.

Ejercicio 3. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que satisface $|\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}| > 0$. Probar que existe $c > 0$ tal que $f^*(x) \geq c\|x\|^{-n}$ para $\|x\| \geq 1$. Deducir que $f^* \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, salvo que $f = 0$ en casi todo punto.

Ejercicio 4. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

(a) Probar que si $1 \leq p < \infty$, existe $c > 0$ que no depende de f tal que para todo $\alpha > 0$

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > \alpha\}| \leq \frac{c}{\alpha} \int_{\{x:|f(x)|\geq\alpha/2\}} |f(x)|dx.$$

(b) Probar que si $1 < p \leq \infty$, entonces $f^* \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Además existe $c_p > 0$ que no depende de f tal que $\|f^*\|_p \leq c_p \|f\|_p$.

Ejercicio 5. Sea $\mathcal{S} = \{S_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos medibles. Decimos que $\mathcal{S}$ se *contrae regularmente a* x si verifica

(i) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $S_i \in \mathcal{S}$ con diam $S_i < \varepsilon$.

(ii) Existe una constante $k > 0$ tal que para todo $S_i \in \mathcal{S}$, si Q_i es el cubo más pequeño con centro en x que contiene a S_i, entonces $|Q_i| \leq k|S_i|$.

Notar que los conjuntos S_i no necesitan contener a x.

(a) Probar que $\{B(x,r)\}_{r>0}$ se contrae regularmente a x

(b) Probar que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces en todo punto de Lebesgue de f

$$\frac{1}{|S|}\int_S |f(y) - f(x)|dy \to 0$$

para toda familia $\mathcal{S}$ que se contrae regularmente a x.

Ejercicio 6. Sea $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ medible y acotada tal que sop $(\phi) \subseteq \{x : \|x\| \leq 1\}$ y $\int_{\mathbb{R}^n} \phi dx = 1$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea $\phi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\phi(x/\varepsilon)$. Probar que para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0}(f * \phi_\varepsilon)(x) = f(x),$$

si x es un punto de Lebesgue de f.

Ejercicio 7. Hallar $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ creciente, continua y tal que

$$\int_0^1 f'(x)dx < f(1) - f(0).$$

Ejercicio 8. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. Probar que

(a) F es absolutamente continua.

(b) F es derivable en casi todo punto y $F'(x) = f(x)$.

Ejercicio 9. Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente y absolutamente continua con $g(a) = c$ y $g(b) = d$.

(a) Si $G \subseteq [c, d]$ es abierto, entonces $|G| = \int_{g^{-1}(G)} g'(x)dx$.

(b) Sea $H = \{x : g'(x) \neq 0\}$. Si $E \subseteq [c, d]$ y $|E| = 0$ entonces $g^{-1}(E) \cap H$ tiene medida nula.

(c) Si $E \subseteq [c, d]$ es medible, entonces $F = g^{-1}(E) \cap H$ es medible y $|E| = \int_F g' = \int_a^b \chi_E(g(x))g'(x)dx$.

(d) Si f es medible y no negativa sobre $[c, d]$, entonces $(f \circ g)g'$ es medible sobre $[a, b]$ y $\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$.

Ejercicio 10. Sean $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, absolutamente continua en $[a, b]$, g integrable sobre $[a, b]$ y

$$G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)dt.$$

Probar que

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b G(x)F'(x)dx.$$

Ejercicio 11. Probar que si f es de variación acotada en $[a,b]$, entonces f se puede escribir como $f = g + h$ donde g es absolutamente continua en $[a,b]$ y h es singular en $[a,b]$. Probar, además, que g y h son únicas salvo constantes aditivas.

Ejercicio 12. Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$P(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$$

Notar que $P \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\int P = 1$ y $P > 0$. Para $\varepsilon > 0$ definimos $P_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} P(\frac{x}{\varepsilon})$. La función P_ε se llama el *núcleo de Poisson* y la convolución $f_\varepsilon = f * P_\varepsilon$. se llama la *integral de Poisson de f*.
Definimos $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ por $F(x,y) = f_y(x)$.

(a) Notar que $P_y(x) = P(x,y)$ es armónica en el semiplano superior, es decir, satisface la ecuación de Laplace
$$\frac{\partial^2 P_y(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y(x)}{\partial y^2} = 0$$
si $y > 0$.

(b) Probar que si $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, entonces
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left(\frac{\partial^2 P_y(x-t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P_y(x-t)}{\partial y^2} \right) dt$$
Concluir que $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$ para $y > 0$, es decir, F es armónica en el semiplano superior.

(c) Probar que si f es integrable en $\mathbb{R}$ entonces $\lim_{y \to 0^+} F(x,y) = f(x)$ si f es continua en x.

Entonces, F resuelve el *problema de Dirichlet* para el semiplano superior, es decir, si f es continua e integrable en $\mathbb{R}$ entonces $F(x,y)$ define una función armónica en el semiplano superior y que cumple $\lim_{y \to 0^+} F(x,y) = f(x)$.

Ejercicio 13. Sea $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

Notar que $K \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $\int K = 1$ y $K > 0$. Para $\varepsilon > 0$ definimos $K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} K(\frac{x}{\varepsilon})$, y haciendo $\varepsilon = \sqrt{t}$, $t > 0$, obtenemos el *núcleo de Gauss-Weierstrass*

$$W(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/t}$$

Definimos $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ por

$$F(x,t) = \int f(y) W(x-y,t) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/t} dy$$

(a) Notar que $W(x,t)$ satisface la *ecuación del calor*

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = 4\frac{\partial W}{\partial t}$$

Probar que si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ entonces F también es solución de la ecuación del calor.

(b) Probar que si f es integrable en $\mathbb{R}$ entonces $\lim\limits_{t\to 0^+} F(x,t) = f(t)$ si f es continua en x.

Ejercicio 14. (*Teorema de interpolación de Marcinkiewicz*) Sean $1 \leq p < q \leq \infty$ y sea T un operadr subaditivo definido en $L^p(\mathbb{R}^n) + L^q(\mathbb{R}^n)$ con valores en el conjunto de funciones medibles de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que T es de tipo débil (p,p) y de tipo débil (q,q). Probar que T es de tipo fuerte (r,r) para todo r tal que $p < r < q$.