Práctica 7: Medidas abstractas

Ejercicio 1. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma$, $Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

Ejercicio 2. *Teorema de Egorov.* Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k\geq 1}$ converge a.e. en E a un límite finito. Probar que dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E \backslash A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k\geq 1}$ converge uniformemente en A.

Ejercicio 3. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y si f y f_k son medibles y finitas a.e. en un conjunto medible E, entonces $(f_k)_{k\geq 1}$ converge en medida sobre E a f ($f_k \overset{m}{\to} f$) si para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k\to\infty} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

Probar que

(a) Si $f_k \to_k f$ a.e. sobre E y $\mu(E) < \infty$, entonces $f_k \overset{m}{\to} f$ sobre E.

(b) Si $f_k \overset{m}{\to} f$ sobre E, existe una subsucesión $(f_{k_j})_{j\geq 1}$ tal que $f_{k_j} \to f$ a.e. en E.

Ejercicio 4. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y μ y ν dos medidas sobre Σ tales que $\mu(A) \leq \nu(A)$, para todo $A \in \Sigma$. Probar que si $f \in L^1(X, \nu)$ entonces $f \in L^1(X, \mu)$.

Ejercicio 5. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.

(a) Si $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \underset{n\to\infty}{\to} 0$, probar que $f_n \overset{m}{\to} 0$.

(b) Si $\mu(X) < \infty$ y $f_n \overset{m}{\to} 0$, probar que $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Ejercicio 6. Sea μ la medida contante sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ (es decir, $\mu(A) = \#A$). Probar que $f \in L^1(\mathbb{N}, \mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso, $\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

Ejercicio 7. Sea μ la medida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ definida por $\mu(E) = \sum_{n\in E} \frac{1}{n^2}$.

(a) Probar que μ es una medida finita.

(b) Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $f_k : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$,

$$f_k(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad 1 \leq n \leq k \\ 0 & , \quad k < n. \end{cases}$$

Probar que $(f_k)_{k \geq 1}$ converge en μ-medida.

(c) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ / $f(n) = \sqrt{n}$. ¿Para qué valores de $p \geq 1$, resulta $f \in L^p(\mathbb{N}, \mu)$?

Ejercicio 8. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida finita y $\varphi : X \to \mathbb{R}_{>0}$ una función μ–medible. Probar que:

(a) si φ es medible entonces está definida $\int_X \varphi \ln(\varphi)\, d\mu$,

(b) si φ pertenece a $L^2(X, \mu)$ entonces $\varphi \ln(\varphi)$ pertenece a $L^1(X, \mu)$.

Ejercicio 9. Sea (X, Σ) un espacio medible y sea $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ que satisface:

(i) Si $A, B \in \Sigma$ disjuntos, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente de conjuntos de Σ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \varnothing$ entonces $\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0$.

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 10. Sean $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\varphi : [0, 1) \to S^1$, $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$. En S^1 se considera la $\sigma-$álgebra

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq S^1 : \varphi^{-1}(A) \text{ es medible Lebesgue}\}$$

y la medida m sobre $\mathcal{A}$ definida por:

$$m(A) = |\varphi^{-1}(A)|.$$

Dada $f : S^1 \to R_{\geq 0}$, tal que $f \circ \varphi$ es medible Lebesgue, probar que f es $\mathcal{A}-$medible y

$$\int_{S^1} f\ dm = \int_0^1 f \circ \varphi\ dt.$$

Ejercicio 11. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida positiva y finita. Sean $f \in L^1(X, \mu)$ y $S \subseteq \mathbb{C}$ cerrado tal que $\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \in S$ para todo $E \in \Sigma$ con $\mu(E) > 0$. Probar que $f(x) \in S$ $\mu -$ a.e.

Ejercicio 12. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \Sigma$, probar que

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

Ejercicio 13. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y f tal que existe $\int_X f d\mu$. Definimos una medida con signo ν sobre (X, Σ) por $\nu(E) = \int_E f d\mu$. Probar que:

(a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu$ $(E \in \Sigma)$,

(b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$ $(E \in \Sigma)$.

Ejercicio 14.

(a) Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar que

$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \mu(E) < \delta \ \Rightarrow\ \lambda(E) < \epsilon.$$

(b) Demostrar que la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ es necesaria en (a).

Ejercicio 15. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

(a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu$ $(B \in \Sigma_2)$, entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2, absolutamente continua con respecto a μ. Deducir que existe g Σ_2-medible tal que:

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \qquad (B \in \Sigma_2).$$

(b) Si $\Sigma_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \Sigma_1$, determinar la función g del inciso anterior.

Ejercicio 16. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \delta)$ donde $\mathcal{M}$ es la $\sigma-$álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

(a) Probar que no existe $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x) dx \qquad \forall A \in \mathcal{M}.$$

(b) Dada $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ.

(c) Dada $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ medible, hallar $\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}} f d\delta$.

Ejercicio 17. Sea μ la medida contante en $\mathbb{R}$ y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe f tal que

$$m(E) = \int_E f d\mu$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Radon-Nikodym?

Ejercicio 18. Sean (X, Σ) un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada definidas en Σ, tales que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int f d\nu = \int f g d\mu \qquad \forall f \text{ medible .}$$

(b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 19. Sea (X, Σ) un espacio de medida y sean μ y ν dos medidas finitas en (X, Σ). Definimos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por $\overline{\mu} = \mu + \nu$.

(a) Probar que existe una función $f \in L^1(\overline{\mu})$ tal que $\nu(E) = \int f d\overline{\mu}$ y que $0 \leq f < 1$ μ-a.e.

(b) Deducir que $\int g d\nu = \int g f d\overline{\mu}$ para toda $g \geq 0$ medible.

(c) Si, además, $\nu(E) = \int_E h d\mu$ para todo $E \in \Sigma$ entonces $h = \dfrac{f}{1-f}$ μ-ae.

Ejercicio 20. Sea Γ una medida exterior en los subconjuntos de un conjunto $\mathcal{S}$.

(a) Probar que la familia de subconjuntos Γ-medibles de $\mathcal{S}$ forma una σ-álgebra.

(b) Probar que si $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos entonces $\Gamma(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} E_k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \Gamma(E_k)$.

Concluir que si restringimos Γ a la σ-álgebra de subconjuntos Γ-medibles de $\mathcal{S}$ resulta una medida.

Ejercicio 21. Sea μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$. Definimos $g_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$.

(a) Probar que g_μ es monótona creciente, $\mu((a, b]) = g_\mu(b) - g_\mu(a)$, g_μ es continua por la derecha y $\lim\limits_{x\to-\infty} g_\mu(x) = 0$

(b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente. Probar que Λ_f es finita $\iff$ f es acotada.

(c) Sea f creciente, acotada y continua por la derecha. Sea $\mu = \Lambda_f$ y sea g_μ la definida en (a).

Muestre que f y g_μ difieren en una constante, luego si hacemos la suposición adicional que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, entonces $f = g_\mu$.

(d) Si identificamos dos funciones de $\mathbb{R}$ que difieren en una constante, muestre que hay una correspondecia biunívoca entre las medidas de borel finitas de la recta y la clase de las funciones acotadas crecientes y continuas por la derecha.

Ejercicio 22. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ creciente y continua por la derecha.

(a) Mostrar que
$$\Lambda_f \ll \mathcal{L}^1 \iff f \in AC([a,b]) \ \forall a < b \in \mathbb{R}$$

(b) Si $\Lambda_f \ll \mathcal{L}^1$, entonces $\dfrac{\mathrm{d}\Lambda_f}{\mathrm{d}\mathcal{L}^1} = f'$

(aquí $\mathcal{L}^1$ representa la medida de Lebesgue 1-dimensional).

Ejercicio 23. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Notamos con $\mathcal{H}_\alpha$ la medida de Haussdorf α-dimensional.

(a) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(E + x) = \mathcal{H}^\alpha(E)$ $\forall E$ medible, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(cE) = c^\alpha \mathcal{H}^\alpha(E)$ $\forall E$ medible, $\forall c > 0$.

(c) Probar que si $\mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = 0$ $\forall \beta > \alpha$

(d) Probar que si $0 < \mathcal{H}^\alpha(E) \leq \infty$, entonces $\mathcal{H}^\beta(E) = \infty$ $\forall \beta < \alpha$

Ejercicio 24. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Definimos la *dimensión* de E como
$$dim(E) = \sup\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = \infty\} = \inf\{\alpha : \mathcal{H}^\alpha(E) = 0\}$$

(a) Probar que $\mathcal{H}^\alpha(E) = 0$ $\forall \alpha > dim(E)$

(b) Sea $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$. Probar que si $dim(E_k) = d$ $\forall k \in \mathbb{N}$, entonces $dim(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_k) = d$

Concluir que si E es numerable, entonces $dim(E) = 0$.

(c) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación bi-Lipschitz, i.e. $\exists C_1, C_2 > 0$ tal que
$$C_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| < C_2|x - y|.$$

Probar que $dim(E) = dim(f(E))$.

Ejercicio 25. Probar que:

(a) En $\mathbb{R}$, $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$

(b) En $\mathbb{R}^n$, existen constantes $a, b > 0$ tal que
$$a\mathcal{L}^n \leq \mathcal{H}^n \leq b\mathcal{L}^n$$

(Se puede probar, aunque es más complicado, que existe c_n tal que $\mathcal{L}^n = c_n\mathcal{H}^n$)

(c) $dim(\mathbb{R}^n) = n$. Concluir que si $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces $dim(E) \leq n$

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico, y $f : [0,1] \to X$ una curva continua. Definimos la *longitud de arco* de f como

$$Lf = \sup \sum_{i=1}^{n} d(f(x_{i-1}), f(x_i))$$

donde el supremo se toma sobre todas las particiones $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$.
Si $Lf < \infty$ se dice que la curva es *rectificable.*
Sea $\mathcal{C} = f([0,1])$. Probar que

(a) $Lf \geq \mathcal{H}^1(\mathcal{C})$

(b) Si f es inyectiva, entonces $Lf = \mathcal{H}^1(\mathcal{C})$.

Ejercicio 27. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$, tal que existe $0 < \alpha < 1$ para el cual $0 < \mathcal{H}^\alpha(E) < \infty$. Probar que E es totalmente disconexo (i.e. las componentes conexas de E son los puntos).

Ejercicio 28. Sea (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad y sea $X = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_i son todos distintos, los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos y $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i$. Sea $\mathcal{U}(X) = \{X^{-1}(B) /\ B \text{ boreliano}\}$ la σ-álgebra generada por X.

(a) Describir precisamente los conjuntos que componen $\mathcal{U}(X)$.

(b) Probar que si una variable aleatoria Y es $\mathcal{U}(X)$-medible, entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_i.

(c) Mostrar que, entonces, Y puede ser escrita como función de X.

Ejercicio 29.

(a) Probar que si A y B son eventos independientes en un espacio de probabilidad, entonces también lo son A^c y B. Idem para A^c y B^c.

(b) Sea $A_1, \ldots, A_n$ una partición del espacio muestral Ω con $P(A_i) > 0$. Probar que si B es un evento con probabilidad positiva, entonces vale la *fórmula de Bayes*

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}.$$

Ejercicio 30. Sean $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel y P la medida de Lebesgue. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Definimos en $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ las siguientes variables aleatorias

$$X_1(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_1), \qquad X_2(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_2).$$

Probar que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas.

Ejercicio 31.

(a) Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una función Σ-medible. Consideramos la medida μ_X en los borelianos de $\mathbb{R}$ definida por $\mu_X(A) = \mu(X^{-1}(A))$. Probar que para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μ_X-integrable, vale que

$$\int_{\mathbb{R}} f(y) d\mu_X = \int_{\Omega} f(X) d\mu$$

(b) Sea (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad y sea $X : \Omega \to \mathbb{R}_{>0}$ una función Σ-medible con $\int_\Omega f dP = 1$. Definimos una medida ν sobre (Ω, Σ) por

$$\nu(A) = \int_A f dP.$$

Probar que (Ω, Σ, ν) es un espacio de probabilidad y que para toda $g : \Omega \to \mathbb{R}$ ν-integrable vale que

$$\int_\Omega g d\nu = \int_\Omega g f dP$$

(c) En particular, sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria y sea f la función de densidad de X.Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y supongamos que $Y = g(X)$ es integrable. Probar que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} g f$$

Ejercicio 32. Sea (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{V} \subseteq \Sigma$ una sub-σ-álgebra.

(a) Probar que $E(E(X|\mathcal{V})) = E(X)$.

(b) Probar que si $\mathcal{W} = \{\varnothing, \Omega\}$ es la σ-álgebra trivial, entonces $E(X|\mathcal{W}) = E(X)$.

Ejercicio 33. *Ley débil de los grandes números.* Sean $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E(X_i) = \alpha$. Probar que

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \alpha$$