Práctica 1: Medida de Lebesgue - Ejercicios Adicionales

Ejercicio 1. Un intento previo al de Lebesgue, de definir la medida de un conjunto, es la "medida" o contenido de Peano-Jordan (estrechamente ligado a la integral de Riemann). Si $A \subset \mathbb{R}^N$ es un conjunto acotado, definimos su contenido interior (de Peano-Jordan) por:

$$C_i(A) = \sup\{|E| : E \subset A, E \text{ es elemental}\}$$

y su contenido exterior por:

$$C_e(A) = \text{ínf}\{|E| : E \supset A, E \text{ es elemental}\}$$

Finalmente decimos que E es medible en el sentido de Peano-Jordan si $J_e(A) = J_i(A)$ y en este caso definimos su contenido de Peano-Jordan $C(A)$ como su valor común.
Resulta instructivo comparar ambos conceptos:

i) Probar que $A \subset \mathbb{R}^N$ es medible en el sentido de Peano-Jordan si y sólo si ∂A tiene contenido cero.

ii) Probar que si $I \subset \mathbb{R}^N$ es un intervalo que contiene a A, entonces A es medible en el sentido de Peano-Jordan si y sólo si χ_A es integrable según Riemann en I, y en este caso:
$$C(A) = \int_I \chi_A(x)\, dx \ (R)$$

iii) Probar que si A es un conjunto cerrado, entonces A tiene contenido cero si y sólo si ∂A tiene medida nula en el sentido de Lebesgue. Mostrar que esto no es cierto en general si A no es cerrado.

iv) Probar que cualquier conjunto medible en el sentido de Peano-Jordan lo es en el de Lebesgue, y que $C(A)$ coincide con su medida de Lebesgue.

v) Mostrar que el contenido de Peano-Jordan es finitamente aditivo, pero no σ-aditivo. Mostrar que los conjuntos medibles en el sentido de Peano-Jordan no forman una σ-álgebra.

Nota: La teoría de la medida de Peano-Jordan (y su aplicación a la integral de Riemann) está desarrollada por ejemplo en el libro de R. Courant y F. John "Introducción al cálculo y al análisis matemático", volumen 2.