Práctica 5: Medidas e Integración en espacios abstractos

Ejercicio 1. Probar que cada una de las siguientes ternas $(X, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida. En cada caso encontrar todos los conjuntos de medida nula, calcular $L^1(\mu)$ y caracterizar $\int_X f d\mu$.

(a) **Medida de contar:** $X =$ un conjunto, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$, $\mu(E) = \#E \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

(b) **Medida de contar pesada:** dada una sucesión de números $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \infty)$ (llamados pesos), sean $X = \mathbb{N}, \mathcal{M} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\mu(E) := \sum_{k\in E} a_k$.

(c) **Medida delta:** X cualquiera, $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ y $\mu_{x_0} = \delta_{x_0}$ $(x_0 \in X)$, donde

$$\delta_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E, \\ 0, & x_0 \notin E. \end{cases}$$

(d) **Medida de Lebesgue pesada**. Sea $w(x) \geq 0$ una función medible, $X = \mathbb{R}^N$, $\mathcal{M}=$ los conjuntos medibles Lebesgue de $\mathbb{R}^N$ y

$$\mu_w(E) = \int_E w(x)\, dx$$

(e) **Medida sobre una curva suave**: Si $C \subset \mathbb{R}^N$ es una curva suave, parametrizada por una función $\phi(t) : I \to C$ biyectiva ($I \subset \mathbb{R}$ un intervalo), de clase C^1 y con velocidad nunca nula, tomamos $X = C$, $\mathcal{M} = \{A \subset C : \phi^{-1}(A)$ es medible Lebesgue$\}$ y $\mu = \mu_C$ dada por:

$$\mu_C(A) = \int_{\phi^{-1}(A)} \|\phi'(t)\|\, dt$$

Probar que μ_C es independiente de la parametrización elegida para la curva. ¿Cómo podría generalizarse para una superficie suave bidimensional contenida en $\mathbb{R}^3$?

Ejercicio 2. Probar que toda medida μ definida sobre $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, es como la del ítem (b) del ejercicio anterior para una sucesión de pesos $(a_k)_k$ adecuada.

Ejercicio 3. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

Ejercicio 4. Medidas de Lebesgue-Stieltjes: Dada una función creciente $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y continua por la derecha, definimos la medida exterior asociada a F por:

$$\Lambda_F^*(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_F((a_n, b_n]) \text{ donde } \lambda_F((a_n, b_n]) = F(b_n) - F(a_n)$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los cubrimientos $\{(a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ de A por una familia numerable de intervalos semiabiertos.

1. Probar que Λ_F^* es una medida exterior métrica.
2. Probar que si $F(x) = x$, Λ_F^* coincide con la medida exterior de Lebesgue.
3. Si notamos por Λ_F la restricción de Λ_F^* a los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$, se obtiene una medida tal que $\Lambda_F((a, b]) = \lambda_F((a, b]) = F(b) - F(a)$.
4. Si F es acotada, probar que Λ_F es finita.
5. El conjunto $\{a\}$ tiene medida nula para Λ_F si y sólo si $F(x)$ es continua en $x = a$.
6. Probar que Λ_F^* es regular en el siguiente sentido: para cualquier $E \subset \mathbb{R}^N$, existe G de clase G_δ tal que $G \supset E$ y $\Lambda_F^*(G) = \Lambda_F^*(E)$.

Ejercicio 5. Sea μ una medida de Borel finita en $\mathbb{R}$ (Esto es: definida en la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$). Pongamos:

$$F(x) = \mu((-\infty, x])$$

1. Probar que F resulta acotada, creciente y continua por la derecha.
2. Probar que $\mu = \Lambda_F$

Ejercicio 6. Sea $E \subset \mathbb{R}^N$. Dado $s \geq 0$, definimos

$$H_\delta^s(A) = \inf \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{diam(A_n)^s}$$

donde la suma se toma sobre todos los cubrimientos numerables de A por conjuntos $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diámetro menor que δ, y definimos la *medida exterior de Haussdorff s-dimensional* por:

$$H^s(A) = \lim_{\delta\to 0} H_\delta^s(A)$$

1. Probar que H^s es una medida exterior métrica.
2. Probar que $H^s(\lambda A) = \lambda^s H^s(A)$ para todo $A \subset \mathbb{R}^N$, y $\lambda > 0$.

Ejercicio 7. Si $A \subset \mathbb{R}^N$, se define su *dimensión de Hausdorff* del siguiente modo. Si $H^s(A) = 0$ para todo s, decimos que $\mathrm{dim(A)} = 0$. Si no, definimos:

$$\dim(A) = \sup\{s \geq 0 : H^s(A) = +\infty\}$$

1. Probar que $H^s(A) = 0$ si $s > \dim(\mathrm{A})$ y que $H^s(A) = +\infty$ si $s < \dim(\mathrm{A})$.
2. Probar que si $A \subset \mathbb{R}^N$, entonces $\dim(A) \leq N$.
3. Probar que si $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ y $\dim(A_n) = s$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\dim(A) = s$.