Práctica 8: Espacios de Hilbert - Teorema de Radon-Nikodym

Ejercicio 1. Sea $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida finita. Si $E \in \mathcal{M}$, $L^2(E)$ puede pensarse como un subespacio ceerado de $L^2(X)$ (extendiendo las funciones por cero fuera de E).

1. Sea $u \in L^2(X)$, ¿cuánto vale la proyección ortogonal de u sobre $L^2(E)$?.
2. Sea $\gamma : H \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(f) = \int_E f(x) d\mu$. Comprobar que es una funcional lineal continua, calcular su norma y encontrar la representación dada por el teorema de Riesz.

Ejercicio 2. En el espacio

$$H = \{u : [a, b] \to \mathbb{R} : u \text{ es absolutamente continua en } [a, b], u(a) = 0 \text{ y } u'(t) \in L^2[a, b]\}$$

definimos el producto escalar:

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u'(t)v'(t)\, dt$$

1. Comprobar que H es un espacio de Hilbert real.
2. Consideramos la funcional lineal $\gamma : H \to \mathbb{R}$ dada por $\gamma_1(u) = \int_a^b u(t)dt$, probar que γ_1 es una funcional lineal continua, calcular su norma, y encontrar la representación dada por el teorema de Riesz.
3. Hacer lo mismo con la funcional $\gamma_2(u) = u(b)$.

Ejercicio 3.

1. Sea $S \subset L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ un subespacio con la siguiente propiedad: Si $g \in L^2(X)$ es tal que
$$\int_X f(x)g(x)\, d\mu = 0$$
para toda $f \in S$, entonces $g(x) = 0$ en casi todo punto de X (con respecto a μ). Probar que S es denso en $L^2(X)$.
2. Sea $S \subset \ell^2$ el siguiente subespacio:
$$S = \left\{ (x_n)_{n\in N} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$$
Probar que es denso en ℓ^2.

Ejercicio 4. Sea H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado y $\gamma : S \to \mathbb{C}$ una funcional lineal continua. Probar que existe una funcional $\tilde{\gamma} : H \to \mathbb{C}$ continua tal que $\tilde{\gamma}(x) = \gamma(x)\ \forall x \in S$ y tal que $\|\tilde{\gamma}\| = \|\gamma\|$. (Sugerencia: usar el teorema de representación de Riesz)

Ejercicio 5. Sean μ y ν dos medidas sobre el espacio de medida (X, Σ). Probar que si para todo $\epsilon > 0$, existen $A_\epsilon \in \Sigma$ y $B_\epsilon \in \Sigma$ tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \phi,\ \ A_\epsilon \cup B_\epsilon = X,\ \ \mu(A_\epsilon) < \epsilon \ \text{ y } \ \nu(B_\epsilon) < \epsilon;$$

entonces existen $A \in \Sigma$ y $B \in \Sigma$ tales que:

$$A \cap B = \phi,\ \ A \cup B = X,\ \ \mu(A) = 0 \ \text{ y } \ \nu(B) = 0.$$

Ejercicio 6. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible (X, Σ). Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $X = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \Sigma$, probar:

(a) $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$,

(b) $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \text{ínf}\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \Sigma\}$.

Ejercicio 7. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida, f tal que existe $\int_X f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu$ $(E \in \Sigma)$. Probar que:

(a) $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu\ (E \in \Sigma)$,

(b) $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu\ (E \in \Sigma)$.

Ejercicio 8.

(a) Sean λ y μ medidas sobre (X, Σ) y $\lambda(X) < \infty$. Probar que

$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \mu(E) < \delta \ \Rightarrow\ \lambda(E) < \epsilon.$$

(b) Mostrar que sin la hipótesis $\lambda(X) < \infty$ (a) puede ser falso.

Ejercicio 9. Sean (X, Σ_1, μ) un espacio de medida finita y $f \in L^1(X, \mu)$. Sea Σ_2 una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de X tal que $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$.

(a) Si $\mu_f(B) = \int_B f d\mu$ $(B \in \Sigma_2)$, entonces μ_f define una medida con signo sobre Σ_2, absolutamente continua con respecto a μ. Deducir que existe g Σ_2-medible tal que:

$$\int_B f d\mu = \int_B g d\mu \qquad (B \in \Sigma_2).$$

(b) Si $\Sigma_2 = \{\phi, B, B^c, X\}$ para algún $B \in \Sigma_1$, determinar la función g del inciso anterior.

Ejercicio 10. Sean X un conjunto y $A_1, \dots, A_N$ subconjuntos disjuntos de X tal que $\cup_{i=1}^{N} A_i = X$. Sea Σ la $\sigma-$álgebra generada por $\{A_1, \dots, A_N\}$. Probar que,

(a) $B \in \Sigma$ si y sólo si existen $i_1, \dots, i_k$ tales que $B = \cup_{j=1}^{k} A_{i_j}$.

(b) Caracterizar las funciones $\sigma-$ medibles.

Ejercicio 11. Para cada uno de los siguientes espacios medibles $(X, \mathcal{A})$ y medidas λ, μ. Decidir si $\lambda \ll \mu$ y en caso de ser posible hallar una función densidad.

(a) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\mu =$ medida de Lebesgue y $\lambda = \delta$.

(b) $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} =$ sigma-álgebra de Lebesgue, $\lambda =$ medida de Lebesgue y $\mu =$ medida de contar. ¿ Contradicen sus conclusiones el Teorema de Radon Nikodym?

(c) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\lambda =$ medida de contar, $\mu =$ medida de contar con pesos $a_k = 1/2^k$.

Ejercicio 12. Sean (X, Σ) un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada definidas en Σ, tales que $\nu \ll \mu$.

(a) Probar que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int_X f d\nu = \int_X f g d\mu \qquad , \forall f \text{ medible y tal que } \int_X f d\nu \text{ existe.}$$

(b) Probar que $\{x \in X : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in X : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 13. Sean μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}$ y m la medida de Lebesgue unidimensional. Definimos $f(x) = \mu((-\infty, x])$, $\;-\infty < x < +\infty$.

(a) Pruebe que f es monótona creciente, $\mu((a, b]) = f(b) - f(a)$, f es continua por la derecha y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

(b) Pruebe que μ es absolutamente continua respecto de m si y sólo si f es una función absolutamente continua. Muestre que en ese caso, $\frac{d\mu}{dm} = f'$.

(c) Pruebe que μ es singular respecto m si y sólo si $f' = 0$ a.e. (sugerencia: considere un argumento similiar al usado para probar que las funciones monótonas son derivables en casi todo punto).

Ejercicio 14. (Descomposición polar de una medida compleja) Sea $(X, \mathcal{M})$ un espacio medibble, $\lambda : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ una medida compleja, y $|\lambda| : \mathcal{M} \to \mathbb{C}$ su variación.

1. Probar que existe una función $\rho : X \to \mathbb{C}$, $\rho \in L^1(|\lambda|)$ tal que:

$$\lambda(E) = \int_E \rho \, d|\lambda| \; (\forall E \in \mathcal{M})$$

2. Probar que $|\rho(x)| = 1$ para casi todo $x \in X$ con respecto a $|\lambda|$.

3. Concluir que si definimos:

$$\int_X f \, d\lambda = \int_X f\rho \, d|\lambda|$$

para $f \in L^1(|\lambda|)$, tenemos

$$\left| \int_X f \, d\lambda \right| \leq \int_X |f| \, d|\lambda|$$