Práctica 0: Conjuntos y repaso de la integral de Riemann

Ejercicio 1. Dada una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de E, se define:

$$\liminf_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} E_k \quad \text{(límite inferior)}$$

$$\limsup_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} E_k \quad \text{(límite superior)}$$

Probar que

(a) $E - \liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} (E - E_n)$

(b) $E - \limsup_{n\to\infty} E_n = \liminf_{n\to\infty} (E - E_n)$

(c) $\liminf_{n\to\infty} E_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} E_n$

Si $\liminf_{n\to\infty} E_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$, entonces se dice que existe el límite de la sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y a este conjunto se lo denota por $\lim_{n\to\infty} E_n$. Probar que

(d) Si $E_{n+1} \subseteq E_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n$

(e) Si $E_n \subseteq E_{n+1} \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$

(f) Dada una sucesión $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de un conjunto E se define

$$\begin{cases} D_0 = \varnothing \\ D_{n+1} = D_n \triangle E_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Probar que existe $\lim_{n\to\infty} D_n$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} E_n = \varnothing$.

Ejercicio 2. Sea X un conjunto. Para cada subconjunto $A \subseteq X$ se define $\chi_A : X \to \{0,1\}$ por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

(a) $A \subseteq B \Leftrightarrow \chi_A(x) \leq \chi_B(x) \ \forall\, x \in X$

(b) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\chi_B(x) \ \ \forall\, x \in X$

(c) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x) \ \ \forall\, x \in X$

Ejercicio 3. Sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de X y $f : X \to Y$ una función. Probar que

(a) $f(\liminf_{n\to\infty} E_n) \subseteq \liminf_{n\to\infty} f(E_n)$

(b) $f(\limsup_{n\to\infty} E_n) \subseteq \limsup_{n\to\infty} f(E_n)$

(c) $f(\liminf_{n\to\infty} E_n) \subseteq \limsup_{n\to\infty} f(E_n)$

(d) Si f es inyectiva, en (a) y (b) vale la igualdad.

Ejercicio 4. Repaso de la integral de Riemann Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Para cada partición $\pi : a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ de $[a,b]$ consideramos las sumas inferior y superior de Riemann, definidas respectivamente por:

$$s_\pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i) \quad S_\pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i)$$

donde

$$m_i = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x) \quad M_i = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$$

Consideramos los números:

$$I = \sup\{s_\pi(f) : \pi \text{ partición } de\ [a,b]\} \quad \text{(integral inferior)}$$

$$S = \inf\{S_\pi(f) : \pi \text{ partición } de\ [a,b]\} \quad \text{(integral superior)}$$

Finalmente, decimos que f es integrable Riemann en $[a,b]$ si $I = S$, y en ese caso definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx \text{ (según Riemann)} = I = S$$

Probar las siguientes afirmaciones:

i) Una función es integrable Riemann en $[a,b]$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ es posible encontrar una partición π de $[a,b]$ tal que $S(\pi,f) - s(\pi,f) = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x_{i+1} - x_i) < \varepsilon$, siendo $\omega_i = M_i - m_i$ la oscilación de f en el intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

ii) Toda función monótona es integrable Riemann.

iii) Toda función continua en $[a,b]$ es integrable Riemann.

iv) $\chi_{\mathbb{Q}}$ (función de Dirichlet) no es integrable Riemann.

v) Si $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones integrables Riemann en $[a,b]$ y $f_n(x) \to f(x)$ uniformenete para $x \in [a,b]$, entonces f es integrable Riemann en $[a,b]$, y se verifica que:
$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx\ (R) = \int_a^b f(x)\, dx\ (R)$

vi) Dar un ejemplo de una sucesión de funciones $f_n(x)$ integrables Riemann en $[a,b]$ tales que f_n esté uniformemente acotada en $[a,b]$ y converja puntualmente en $[a,b]$ a una función f que no sea integrable Riemann en $[a,b]$.