

PRÁCTICA 3: INTEGRAL DE LEBESGUE

Ejercicio 1. Sea f definida sobre \mathbb{R}^n , medible y no negativa. Probar que si E es medible entonces

$$\int_E f = \sup \left\{ \int_E \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq f, \quad \varphi \text{ simple} \right\}.$$

Ejercicio 2. Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible, $v \in \mathbb{R}^n$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible.

(a) Probar que si $f \geq 0$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x+v)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$$

Concluir que

$$\int_E f(x+v)dx = \int_{E+v} f(x)dx$$

(b) Si f es integrable sobre \mathbb{R}^n , valen para f las mismas afirmaciones.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrable. Probar que para todo $a > 0$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{a}\right) dx = a^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Ejercicio 4. Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Probar que si $|\int_E f dx| = \int_E |f| dx$, entonces $f \geq 0$ a.e. en E ó $f \leq 0$ a.e. en E .

Ejercicio 5. Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $\int_A f dx = 0$ para todo conjunto medible $A \subseteq E$. Probar que $f = 0$ a.e. en E .

Ejercicio 6. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea f integrable sobre E . Probar que si $\int_E |f_n - f| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, entonces $f_n \xrightarrow{m} f$ sobre E . ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 7.

(a) Sea $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Probar que existe $(x_n)_{n \geq 1}$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

(b) Mostrar que existe g integrable sobre $[0, +\infty)$, continua y tal que para una sucesión $(x_n)_{n \geq 1}$, se verifica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = \infty.$$

Ejercicio 8. Sea f integrable sobre \mathbb{R}^n y $Q_k = [-k, k]^n$, $k \in \mathbb{N}$. Probar que

$$\int_{Q_k^c} |f| dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Ejercicio 9.

- (a) Sean E_1, E_2, \dots, E_n conjuntos medibles contenidos en el intervalo $[0, 1]$. Si para cada $x \in [0, 1]$, el conjunto $A_x = \{k : 1 \leq k \leq n \text{ y } x \in E_k\}$ tiene por lo menos q elementos, probar que existe k tal que $1 \leq k \leq n$ y $|E_k| \geq \frac{q}{n}$.
- (b) Sea $(E_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de conjuntos medibles de \mathbb{R}^m y $k \in \mathbb{N}$. Probar que si $G = \{x \in \mathbb{R}^m : x \in E_n \text{ para al menos } k \text{ valores de } n\}$, entonces G es medible y $k|G| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |E_n|$.

Ejercicio 10. Mostrar que en el Lema de Fatou la desigualdad puede ser estricta.

Ejercicio 11. Mostrar que en el Lema de Fatou, la hipótesis de que las funciones de la sucesión sean no negativas, es necesaria.

Ejercicio 12. Sea $(f_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles no negativas definidas sobre E . Si $\lim_{n \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ para cada $x \in E$ y $f_k \leq f$ a.e., probar que

$$\int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_k.$$

Ejercicio 13.

- (a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y sea $(f_k)_{k \geq 1}$ una sucesión decreciente de funciones medibles y no negativas sobre E con $f_1 \in L^1(E)$. Mostrar que

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k < \infty.$$

- (b) Sea $x \in \mathbb{R}_{>1}$ mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln x$$

considerando la función $f_n(t) = t^{\frac{1}{n}-1}$ para $1 < t < x$.

Ejercicio 14. Si $f \in L^1(0, 1)$, mostrar que $x^n f(x) \in L^1(0, 1)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\int_0^1 x^n f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ejercicio 15. Probar que para cada $g \in L^1([0, \infty))$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n xg(x) dx = 0.$$

Ejercicio 16. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre \mathbb{R}^m y g integrable sobre \mathbb{R}^m tales que $|f_n| \leq g$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea f una función tal que $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ a.e. Probar que para todo $a > 0$, si llamamos $E_k = \bigcup_{n \geq k} \{x : |f_n(x) - f(x)| \geq a\}$ para $k \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} |E_k| = 0$. Deducir que $f_n \xrightarrow{m} f$.

Ejercicio 17. Sea $g(x) = x^2 \sin(1/x^2)$, definida en $(0, 1)$ y f su derivada. Probar que f es continua en $(0, 1)$, existe $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^1 f(x) dx$, pero $f \notin L^1(0, 1)$.
(Sug.: $|f(x)| \geq (2/x) |\cos(1/x^2)| - 2x \geq 1/2x$ para x tal que $[(2n + 1/3)\pi]^{-1/2} \leq x \leq [(2n - 1/3)\pi]^{-1/2}$, $n \in \mathbb{N}$).

Ejercicio 18. Sea $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre $E \subseteq \mathbb{R}^m$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| dx < \infty,$$

Probar que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente en casi todo punto de E y

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n dx.$$

Ejercicio 19. Sean $f_n : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$; $f_n(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$. Probar que

$$\int_{(0,1)} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \neq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} f_n.$$

Verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{(0,1)} |f_n| = \infty.$$

Ejercicio 20. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $E_n = \{x \in E : |f(x)| \geq n\}$.

(a) Probar que si f integrable sobre E , entonces $\sum_{n \geq 1} |E_n| < \infty$.

(b) Probar que si E es de medida finita y $\sum_{n \geq 1} |E_n| < \infty$ entonces f es integrable sobre E .

Ejercicio 21. Sea $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ medible, $g(x) \geq 0$ para casi todo $x \in [0, 1]$ e integrable sobre $[0, 1]$. Probar que si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, vale la igualdad

$$\int_0^1 g(x)^n dx = \alpha,$$

entonces $g = \chi_E$ a. e. para algún conjunto $E \subseteq [0, 1]$ medible.

Ejercicio 22. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de funciones integrables sobre E y f medible tales que $f_n \xrightarrow{m} f$ sobre E . Si existe g integrable sobre E tal que $|f_n| \leq g$ sobre E , entonces f es integrable y $\int_E |f_n - f| dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ejercicio 23. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. para todo $x \in [0, 1]$, la función $y \mapsto f(x, y)$ es integrable sobre $[0, 1]$ y
2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ es una función de (x, y) acotada.

Probar que

- (a) para todo $x \in [0, 1]$, la función $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ es medible y
- (b) $\frac{d}{dx} \int_0^1 f(x, y) dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) dy$.