

PRÁCTICA 4: TEOREMA DE FUBINI - TEOREMA DE CAMBIO DE VARIABLE

Ejercicio 1.

- (a) Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible tal que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $E_x = \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula. Probar que E tiene medida nula y que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $E_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in E\}$ tiene medida nula.
- (b) Sea $f(x, y)$ una función medible y no negativa definida sobre \mathbb{R}^2 . Supongamos que para casi todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo y . Probar que para casi todo $y \in \mathbb{R}$, $f(x, y)$ es finita para casi todo x .

Ejercicio 2. Sean f y g funciones medibles definidas sobre \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente. Probar que $h(x, y) = f(x)g(y)$ definida sobre \mathbb{R}^{n+m} es medible.

Deducir que si $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $E_2 \subseteq \mathbb{R}^m$ son conjuntos medibles, entonces su producto cartesiano $E_1 \times E_2 = \{(x, y) : x \in E_1 \wedge y \in E_2\}$ es medible en \mathbb{R}^{n+m} y $|E_1 \times E_2| = |E_1||E_2|$.

Ejercicio 3. Sea $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ medible y sea $h : (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x, y) = f(x) - f(y)$. Probar que si h es integrable sobre $(0, 1) \times (0, 1)$, entonces f es integrable sobre $(0, 1)$.

Ejercicio 4. Sean $I = [0, 1]$ y $E \subseteq I \times I$ tales que $|E_x|_e = |I - E_y|_e = 0$ para todo $(x, y) \in I \times I$. Probar que E no es medible.

Ejercicio 5. Sea f una función medible no negativa definida sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Para cada $\alpha > 0$, se define

$$\omega(\alpha) = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|.$$

La función ω se llama *distribución de f sobre E* . Probar que

- (a) $\omega : (0, \infty) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ es una función decreciente.
- (b) $\omega(\alpha+) = \omega(\alpha)$, es decir, ω es continua a derecha.
- (c) $\omega(\alpha-) \geq |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}|$.
- (d) ω continua en $\alpha \Rightarrow |\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}| = |\{x \in E : f(x) > \alpha\}|$.
- (e) Para cada $\alpha \in (0, \infty)$, $\{x : (x, \alpha) \in R(f, E)\} = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$.
- (f) $\int_E f = \int_0^\infty \omega(\alpha) d\alpha$.
- (g) Para cada $p : 0 < p < \infty$,

$$\int_E f^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \omega(\alpha) d\alpha.$$

Ejercicio 6. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que para algún $\alpha \in (0, 1)$, vale la desigualdad $|f(t)| \leq t^\alpha / (1+t)$ para todo $t \geq 0$. Consideramos la función $G : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $G(x, t) = e^{-xt} f(t)$. Probar que

(a) G es medible

(b) $G \in L^1(\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0})$

Ejercicio 7. Sea $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x, y) = x \cdot y$. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible entonces $k^{-1}(E)$ es medible. Deducir que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces $h(x, y) = f(x \cdot y)$ es medible.

Ejercicio 8. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos medibles. Probar que la función $h(x) = |(A-x) \cap B|$ es medible y $\int_{\mathbb{R}} h(x) dx = |A||B|$.

Ejercicio 9. Probar el Teorema de Fubini para funciones a valores complejos.

Ejercicio 10. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(a) Probar que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$, la función $e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x)$ es medible e integrable.

Se define la *Transformada de Fourier de f* como:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i \langle \xi, x \rangle} f(x) dx, \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

(b) Probar que

(i) \hat{f} es acotada y uniformemente continua.

(ii) Si $n = 1$, $\hat{f}(\xi) \xrightarrow{\|\xi\| \rightarrow +\infty} 0$, (*Lema de Riemann-Lebesgue*).

(iii) Si $f(x) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$, donde cada $f_k(x_k) \in L^1(\mathbb{R})$, $1 \leq k \leq n$, entonces $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \dots \hat{f}_n(\xi_n)$.

(iv) Si $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $(f * g)^\wedge = \hat{f} \hat{g}$.

Ejercicio 11. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ integrable y tal que $f(x) = 0$, para todo $x \notin [a, b]$. Se define

$$g(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(t) dt.$$

Probar que

$$\int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx.$$

Ejercicio 12. Probar que:

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = 1/x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 13.

1. Probar que para cualquier función medible no negativa $f(x, y)$ de \mathbb{R}^2 vale,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

2. Probar,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica y sea $Q(x) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = xAx^t$. Probar que la función $f(x) = e^{-Q(x)}$ es integrable sobre \mathbb{R}^n si y sólo si todos los autovalores de A son positivos. Probar, además, que en tal caso

$$\int_{\mathbb{R}^n} f dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Ejercicio 15. Decimos que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función radial si existe $g : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(\|x\|)$. Probar que existe una constante C_n tal que para toda función radial f vale que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = C_n \int_0^\infty r^{n-1} g(r) dr$$

Ejercicio 16. ¿Para qué valores de p es $\|x\|^p$ integrable sobre la bola unitaria $\{\|x\| \leq 1\}$?

Ejercicio 17. Calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + \|x\|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx$$