Práctica 7: Medidas e Integración en espacios abstractos, Teorema de Radon-Nikodym y Medidas de Probabilidad

Medidas e Integración en espacios abstractos

Ejercicio 1. Sea X un conjunto no vacío.

(a) Para cada $E \subset X$, definimos $\mu(E) = card(E)$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ es una medida definida en $\Sigma = \mathcal{P}(X)$. Esta medida se suele llamar la medida de contar o *counting measure*.

(b) Dado $x_0 \in X$. Si $E \subset X$, definimos $\delta_{x_0}(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que δ_{x_0} es una medida en $\mathcal{P}(X)$. Esta medida suele llamarse Delta de Dirac.

(c) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $A \in \Sigma$. Para cada $E \in \Sigma$ definimos $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_A es una medida en Σ.

(d) Sea (X, Σ) un espacio medible. Sean $\mu_1, ..., \mu_n$ medidas definidas en ese espacio y sean $a_1, ..., a_n$ constantes positivas. Probar que

$$\mu = a_1\mu_1 + ... + a_n\mu_n$$

es una medida.

(e) Sea (X, Σ) un espacio medible. Sea $(\mu_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de medidas en ese espacio. Supongamos que la sucesión es monótona creciente, en el sentido de que $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ para todo $E \in \Sigma$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si definimos, para cada $E \in \Sigma$,

$$\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E),$$

entonces μ es una medida.

(f) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Para cada $E \in \Sigma$ definimos

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E, \mu(F) < \infty\}.$$

Probar que μ_0 es una medida. Probar además que cumple la siguiente propiedad: para cada $E \in \Sigma$ existe un conjunto $F \in \Sigma$ contenido en E y de medida finita.

Ejercicio 2. Sea (X, Σ) un espacio medible. Sea la función de conjuntos $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

(a) $A, B \in \Sigma \quad \wedge \quad A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

(b) $A_n \in \Sigma (n \in \mathbb{N}) \quad \wedge \quad A \searrow \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0.$

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 3. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta $Y \in \Sigma$ y $\mu(Y) = 0$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma,\ Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si f es medible y $f = g$ a.e., entonces g es medible.

Ejercicio 4. Revisar los ejercicios de la práctica 1 y decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones en un espacio de medida (X, Σ, μ).

(a) Si $E, F \in \Sigma$ entonces $\mu(E) + \mu(F) = \mu(EUF) + \mu(E \cap F)$.

(b) Supongamos que $X = \mathbb{R}^n$. Si $\in \Sigma$ entonces $\mu(E) = \mu(E + v)$ para todo $v \in \mathbb{R}^N$.

(c) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\text{lim inf } E_j) \leq \text{lim inf } \mu(E_j)$.

(d) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\text{lim sup } E_j) \geq \text{lim sup } \mu(E_j)$.

Ejercicio 5.

1. Sean X un conjunto no vacio, $\Sigma = \mathcal{P}(X)$ y $\mu(A) = C(A)$ (la medida de contar).

   Probar que $f \in L^1(X, \mu)$ entonces el soporte de f es numerable. Dar una expresión para $\int_X f\, d\mu$.

2. En particular, si $X = \mathbb{N}$ entonces $f \in L^1(\mathrm{N}, \mu)$ si y sólo si $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \infty$ y, en este caso $\int_{\mathrm{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

3. Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$ sea $a_{nk} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que para cada n fijo a_{nk} es una sucesión creciente en k. Además existe $a_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $a_{nk} \nearrow a_n$ cuando $k \to \infty$. Probar que

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Ejercicio 6. Sea $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_{x_0})$ el espacio de medida definido en el ejercicio 1. Determinar el conjunto de funciones medibles y hallar,

$$\int f\, d\delta_{x_0}.$$

Ejercicio 7. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sea f $\mathcal{F}$-medible y no negativa. Sea $A \in \mathcal{F}$, y

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\mu.$$

Probar que λ es una medida. Observar que si además $f \in L^1(\Omega)$, λ es una medida finita.

Ejercicio 8. Sea $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mu)$. Probar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$S \in \mathcal{F}, \quad \mu(S) < \delta \Rightarrow \int_S |f| d\mu < \varepsilon.$$

Hint. Tomar ϕ simple, tal que $0 \leq \phi \leq |f|$ y $\int \varphi \, d\mu \geq \int |f| \, d\mu - \varepsilon/2$.

Ejercicio 9. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f \in \mathcal{L}(X, \mu)$. Probar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $Y \in \Sigma$ con $\mu(Y) < \infty$ tal que

$$\int_{X \setminus Y} |f| d\mu < \varepsilon.$$

Ejercicio 10. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ y f funciones finitas a.e. Decimos que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ existe $A_\varepsilon \in \Sigma$ tal que:

$$\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{ y } \quad f_n \rightrightarrows f \text{ en } X \setminus A_\varepsilon.$$

Probar que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, $(f_n)_{n \geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

Ejercicio 11. Teorema de Egorov: Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y E un conjunto medible tal que $\mu(E) < \infty$. Sea $(f_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de funciones medibles sobre E tal que f_k es finita a.e. en E y $(f_k)_{k \geq 1}$ converge a.e. en E a un límite finito. Entonces dado $\epsilon > 0$, existe un conjunto medible $A \subseteq E$ con $\mu(E \backslash A) < \epsilon$ tal que $(f_k)_{k \geq 1}$ converge uniformemente en A.

Ejercicio 12. Si (X, Σ, μ) es un espacio de medida y si f y f_k son medibles y finitas a.e. en un conjunto medible E, entonces $(f_k)_{k \geq 1}$ converge en medida sobre E a f ($f_k \xrightarrow{\mu} f$) si para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k \to \infty} \mu(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\}) = 0.$$

Probar:

(a) Si $f_k \to_k f$ a.e. sobre E y $\mu(E) < \infty$, entonces $f_k \xrightarrow{\mu} f$ sobre E.

(b) Si $f_k \xrightarrow{\mu} f$ sobre E, existe una subsucesión $(f_{kj})_{j \geq 1}$ tal que $f_{kj} \to_j f$ a.e. en E.

Ejercicio 13. Sean $X = \mathbb{N}$ y μ la medida sobre $\mathbb{N}$ tal que: $\mu(E) = \sum_{n:n \in E} \frac{1}{n^2}$.

(a) Probar que μ es una medida finita.

(b) Para cada $k \in N$, definimos $f_k : X \to R$,

$$f_k(n) = \begin{cases} \sqrt{n} & , \quad 1 \leq n \leq k \\ 0 & , \quad k < n. \end{cases}$$

Probar que $(f_k)_{k \geq 1}$ converge en μ–medida.

(c) Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sqrt{n}$ $(n \in N)$. ¿Para qué valores de $p \geq 1$, resulta $f \in L^p(X, \mu)$?

Ejercicio 14. Sean (X, Σ, μ) un espacio de medida y $(f_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones medibles.

(a) Si $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to_{n\to\infty} 0$, probar que $f_n \xrightarrow{\mu} 0$.

(b) Si $\mu(X) < \infty$ y $f_n \xrightarrow{\mu} 0$, probar que $\int_X \frac{|f_n|}{|f_n|+1} d\mu \to_{n\to\infty} 0$.

Ejercicio 15. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Notemos $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel de $\mathbb{R}$. Probar que

(a) Si f es una función medible Σ, entonces $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

(b) Si $\overline{\mathcal{B}} = \{E = B \cup A, B \in \mathcal{B}$ y $A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces f es medible Σ si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 16. Probar que el Teorema de Convergencia Dominada vale, si se cambia convergencia puntual, por convergencia en medida.

Ejercicio 17. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sea $(f_k)_{k\geq 1} : E \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$ existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|f_k(x)| \leq M_x$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Probar que si para todo $\alpha > 0$ existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}) \leq \alpha/k,$$

entonces $\mu(E) = 0$.

Ejercicio 18.

(a) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$ un subconjunto de X de medida finita y sean $(f_n)_{n\geq 1}, f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, finitas en casi todo punto de E y tales que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$ a.e. en E. Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i\geq 1}$ de conjuntos medibles de E tal que

 (i) $\mu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$,

 (ii) Para cada $i \geq 1$, $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ en E_i.

(b) Probar que el mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde A_k es de medida finita para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 19. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $(f_n)_{n\geq 1}$ y f funciones medibles definidas sobre un conjunto $A \in \Sigma$ y finitas en casi todo punto. Sea $(A_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de A medibles, tales que $\mu(A \backslash A_n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Ejercicio 20. Supongamos que $f_k \xrightarrow{\mu} f$ y $g_k \xrightarrow{\mu} g$ sobre E.

(a) Probar que $f_k + g_k \xrightarrow{\mu} f + g$ sobre E.

(b) Probar que si $|E| < +\infty$, entonces $f_k g_k \xrightarrow{\mu} fg$ sobre E. Mostrar que la hipótesis $|E| < +\infty$, no puede quitarse.

(c) Sea $(\frac{f_k}{g_k})_{k\geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en casi todo punto de E. Probar que si $|E| < +\infty$, $g_k \to g$ sobre E y $g \neq 0$ a.e., entonces $\frac{f_k}{g_k} \xrightarrow{\mu} \frac{f}{g}$.

Teorema de Radon-Nikodym y Medidas de Probabilidad

Ejercicio 21. Sea ν una medida con signo sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$. Sean A un conjunto positivo y B un conjunto negativo con respecto a ν tales que: $\Omega = A \cup B$ y $A \cap B = \phi$. Dado $E \in \mathcal{F}$, probar:

1. $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\}$,
2. $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \text{ínf}\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\}$.

Ejercicio 22. Sean $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, f tal que existe $\int_\Omega f d\mu$ y $\nu(E) = \int_E f d\mu (E \in \mathcal{F})$. Probar que:

1. $\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu \ (E \in \mathcal{F})$,
2. $\nu^-(E) = \int_E f^- d\mu \ (E \in \mathcal{F})$.

Ejercicio 23.

1. Sean λ y μ medidas sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\lambda(\Omega) < \infty$. Probar:
$$\lambda \ll \mu \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 :\ \mu(E) < \delta \ \Rightarrow\ \lambda(E) < \epsilon.$$
2. Demostrar que la hipótesis $\lambda(\Omega) < \infty$ es necesaria en (a). (Sug. Considerar μ la medida de Lebesgue en $(0, 1)$ y $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$ para todo $E \subseteq (0, 1)$ medible Lebesgue.)

Ejercicio 24. Sea el espacio de medida $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \delta)$ donde $\mathcal{M}$ es la $\sigma-$álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,
$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

1. Probar que no existe $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \overline{\mathbb{R}}$ medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x)dx \qquad (\forall\, A \in \mathcal{M}).$$

2. Dada $f : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ medible, hallar todas las funciones medibles $g : \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}$ tales que $f = g$ a. e. con respecto a δ.

Ejercicio 25. Sea μ la medida de contar en $\mathbb{R}$ y sea m la medida de Lebesgue. Probar que $m \ll \mu$ pero no existe f tal que

$$m(E) = \int_E f\, d\mu.$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Radon-Nikodym?

Ejercicio 26. Sean $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio de medida, μ una medida finita y ν una medida signada definidas en $\mathcal{F}$, tales que $\nu \ll \mu$.

1. Probar que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que

$$\int f\, d\nu = \int fg\, d\mu \quad \forall f \text{ medible tal que} \int f\, d\nu \text{ existe }.$$

2. Probar que $\{x \in \Omega : g(x) \geq 0\}$ y $\{x \in \Omega : g(x) < 0\}$ son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para ν.

Ejercicio 27. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio de medida y sean μ y ν dos medidas finitas en $(\Omega, \mathcal{F})$. Definimos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por $\bar{\mu} = \mu + \nu$.

1. Probar que existe una función $f \in L^1(\bar{\mu})$ tal que $\nu(E) = \int f d\bar{\mu}$ y que $0 \leq f < 1$ $\mu - a.e.$

2. Deducir que $\int g\, d\nu = \int gf\, d\bar{\mu}$ para toda $g \geq 0$ medible.

3. Si, además, $\nu(E) = \int_E h\, d\mu$ para todo $E \in \mathcal{F}$ entonces $h = \dfrac{f}{1-f}$ $\mu - ae.$

Ejercicio 28. Dado un espacio de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ y una función medible $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, considerar la medida μ_X en los boreleanos de $\mathbb{R}^n$, dada por

$$\mu_X(A) := \mu(X^{-1}(A)) .$$

Probar que para toda función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μ_X integrable, vale que $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ boreleano,

$$\int_A f(y)\, d\mu_X \;=\; \int_{X^{-1}(A)} f(X)\, d\mu .$$

Ejercicio 29. Sea (X, Y) un vector aleatorio $(X, Y) \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y sea P_{XY} la medida inducida por (X, Y) en $\mathbb{R}^2$. Probar que si $P_{XY} << \mathcal{L}$ entonces P_X y P_Y

también lo son y hallar sus funciones de dendidad (derivada de Radón-Nikodym respecto de la medida de Lebesgue).

Ejercicio 30. Sea $X = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ una variable aleatoria simple, donde los números reales a_i son todos distintos, los conjuntos A_i son disjuntos dos a dos y $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Sea $\sigma(X)$ la σ-álgebra generada por X.

1. Describir precisamente los conjuntos que componen $\sigma(X)$.
2. Probar que si la v.a. Y es $\sigma(X)$-medible entonces Y es constante en cada uno de los conjuntos A_i.
3. Mostrar que entonces Y puede ser escrita como una función de X.

Ejercicio 31. Sea $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mathcal{U}$ la $\sigma-$álgebra de Borel y P la medida de Lebesgue. Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua. Definimos en Ω las siguientes variables aleatorias

$$X_1(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_1), \qquad X_2(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_2).$$

Probar que X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas.

Ejercicio 32.

1. Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{U}, P)$ y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ medible con $\int_\Omega f \, dP = 1$, considere la medida ν definida sobre $(\Omega, \mathcal{U})$ dada por
$$\nu(A) = \int_A f \, dP \ .$$
Pruebe que $(\Omega, \mathcal{U}, \nu)$ es un espacio de probabilidad y que para toda $g : \Omega \to \mathbb{R}$ $\nu-$integrable, vale que
$$\int_\Omega g \, d\nu = \int_\Omega g \, f \, dP \ .$$
2. En particular, sea $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una v.a. y supongamos que μ_X tiene función de densidad f. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y supongamos que
$$Y = g(X)$$
es integrable. Entonces
$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x) \, dx,$$
una integral sobre $\mathbb{R}^n$ que se puede "calcular".

Ejercicio 33. Sea (X, Y) un vector aleatorio $(X, Y) \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ definido en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Hallar

1. $E(X|\mathcal{V})$ con $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega\}$

2. $E(X|\mathcal{V})$ con $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$

3. $E(X|Y)$ con Y una variable aleaotoria que toma los valores y_i con probabilidad p_i, $1 \leq i \leq n$.

Ejercicio 34. Probar que

1. $E(E(X|\mathcal{V})) = E(X)$.

2. $E(X) = E(X|\mathcal{W})$ si $\mathcal{W}$ es la $\sigma-$álgebra trivial, $\mathcal{W} = \{\emptyset, \Omega\}$.

Ejercicio 35. Sean X, Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta $f_{XY}(x, y)$. Probar que

$$E(X|Y) = \Phi(Y), \qquad \text{con} \qquad \Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}\, dx.$$

Sugerencia:

1. $\Phi(Y)$ es $\mathcal{U}(Y)$-medible.

2. Si $A \in \mathcal{U}(Y)$, $A = Y^{-1}(B)$ para algún conjunto de Borel de $\mathbb{R}$. Entonces

$$\int_A X dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B x f_{XY}(x, y)\, dy dx.$$

3.

$$\int_A \Phi(Y)\, dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B \Phi(y) f_{XY}(x, y)\, dy dx.$$

4.

$$\int_A X dP = \int_A \Phi(Y)\, dP \qquad \text{para todo } A \in \mathcal{U}(Y).$$