Práctica 3

Ejercicio 1. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 5)$ por:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2 \quad , \quad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} \quad , \quad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x,y) = |x-2y| \quad , \quad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.

i) Probar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$:

(a) $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

(b) $d_2(x,y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}$

(c) $d_\infty(x,y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

ii) Para $n = 2$, dibujar la bola abierta $B(0,r)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio r.

Ejercicio 3. (Algunas desigualdes importantes) Sea $p > 1$ y definamos su exponente conjugado p' por la relaci'on:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

(para $p = 1$ se pone $p' = \infty$, para $p = \infty$ se pone $p' = 1$.)

i) (Desigualdad de Young) Si $x, y \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $1 < p < \infty$,

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'}$$

1. (Desigualdad de Hölder) Para $x \in \mathbb{R}^n$ definamos su norma p

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

(que generaliza a la norma euclídea , caso $p = 2$). Cuando $p = \infty$ ponemos:

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$$

Entonces si $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $1 \leq p \leq \infty$ tenemos que:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \|y\|_{p'}$$

(esto generaliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz)

ii) (Desigualdad de Minkowski) Si $x, y \in \mathbb{R}^n$ tenemos que:

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

iii) Probar que en $\mathbb{R}^n$, cada una de las métricas d_p (con $1 \leq p \leq \infty$) dadas por:

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$$

es una métrica topológicamente equivalente a la usual. Probar que además todas tienen las mismas sucesiones de Cauchy.

Ejercicio 4. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 5. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua }\}$. Probar que son espacios métricos:

i) $(C[a,b], d_1)$, con $d_1(f,g) = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx$

ii) $(C[a,b], d_\infty)$, con $d_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 6. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$.

i) Probar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$.

ii) Construir otras métricas en $X_1 \times X_2$.

Ejercicio 7.

i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d. Observar que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

iii) Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \leq d_n(x, y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

iv) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostrar que $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico con una distancia conveniente.

Ejercicio 8. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).

NOTA: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$

i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

(a) $A^\circ = \bigcup\limits_{\substack{G \text{ abierto} \\ G\subseteq A}} G$

(b) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$

(c) $A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ$

(d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

(e) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

(a) $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A\subseteq F}} F$

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$

(c) $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

(e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

(f) $x \in \overline{A} \iff$ Existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

(a) $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$
(b) $\overline{X - A} = X - A^\circ$

¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ}$, $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$
(b) ∂A es cerrado
(c) $\partial A = \partial(X - A)$

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X \ / \ d(x, a) \leq r\}$.

i) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$.

ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

Ejercicio 12. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el Ejercicio 6. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

i) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$

ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X.

i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

(a) A' es cerrado
(b) $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A' \subseteq B'$
(c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$
(d) $\overline{A} = A \cup A'$
(e) $(\overline{A})' = A'$

ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 14. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0, 1] \quad ; \quad (0, 1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0, 1) \cup \{2\}$$

Ejercicio 15. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X.

i) Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

ii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como $d_A(x) = \inf\{d(x, a) \ / \ a \in A\}$. Probar:

i) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

ii) $x \in A \quad \Longrightarrow \quad d_A(x) = 0$

iii) $d_A(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A}$

iv) $B_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

v) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Ejercicio 18. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

i) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ.

ii) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ.

ii) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

iv) (a) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$.
(b) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$.
¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \ / \ a \in A \ , \ b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$

ii) $d(A, B) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B \neq \emptyset$

iii) $d(A, B) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$

iv) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$