Práctica 6

1. Hacer una lista de los espacios métricos vistos hasta ahora. ¿ Cuáles son normados ? ¿ Cuáles son de Banach ?

2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que se verifican:

   (a) Las operaciones $+ : E \times E \to E$ y $\cdot : \mathbb{R}(\ o\mathbb{C}) \times E \to E$ son continuas.

   (b) $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$ (la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).

   (c) $diam(B_r(x)) = 2r$.

3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall\ x, y \in C$ y $\forall\ t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.

   (a) Probar que $B_r(x)$ es convexo.

   (b) Probar que si $(C_i)_{i\in I}$ son convexos, entonces $\cap_{i\in I} C_i$ lo es.

   (c) Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.

   (d) Probar que si C es convexo, entonces $\overline{C}$ lo es.

4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

   (a) $\overline{S}$ también es un subespacio.

   (b) Si $S \neq E$, entonces $S^o = \emptyset$.

   (c) Si $dim(E) < \infty$, entonces E es cerrado

   (d) Si S es un hiperplano (o sea: $\exists\ x \neq 0 \in E$ tal que $S \oplus \langle x \rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

5. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n) \subset E$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ convege , entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

6. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados , si son densos y si son hiperlanos.

   (a) $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n\} \subset l^\infty$.

   (b) $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subset c$

   (c) $\{x \in l^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset l^1$

   (d) $\{x \in l^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset l^2$

   (e) $\mathbb{R}[X]$(polinomios en una variable) $\subset C[0,1]$

   (f) $C^1[a,b] \subset C[a,b]$

7. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \to F$ una operador lineal. Probar que son equivalentes:

   (a) T es continuo en 0.

   (b) $\exists x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0.

   (c) T es continuo.

   (d) T es uniformemente continuo.

   (e) $\exists M > 0 / \ \forall x \in M \ : \|Tx\| \leq M\|x\|$. ($T$ es acotada)

   (f) $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

8. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Consideramos $L(E,F) = \{T : E \to F / \ T$ es lineal y continua$\}$, y para cada $T \ \in L(E,F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F$$

   Probar que:

   (a) $(L(E,F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

   (b) Si F es de Banach entonces $L(E,F)$ también lo es.

9. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador linal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| =$$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M / \ \|Tx\| \leq M\|x\|\}$$

10. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy$$

   Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

11. (a) En $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\geq 1} / \ \exists n_0, \ a_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$ ponemos la norma infinito. Probar que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f((a_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$$

   es lineal pero no continua.

12. (a) Sea $\phi \in C[0,1]$ y sea $T_\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$

(b) Sea $T : c \to \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Probar que T es lineal, continuo y hallar $\|T\|$.

(c) Sea $1 \leq p \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ el conjugado de p y sea $b \in l^{p'}$. Definimos $T_b : l^p \to \mathbb{R}$ como sigue

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$$

Probar que T_b es lineal, continuo y hallar $\|T_b\|$.

13. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión n y sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ un isomorfismo algebraico. Consideramos en $\mathbb{R}^n$ la norma :$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$

(a) Probar que $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \|x\|_\infty = 1\}$ es compacto en $\mathbb{R}^n$

(b) Probar que existen $c_1,\ c_2 > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$: $c_1\|x\|_\infty \leq \|f(x)\|_E \leq c_2\|x\|_\infty$

(c) Deducir que si $N_1,\ N_2$ son dos normas en $\mathbb{R}^n$, entonces existen constantes $a, b > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$: $aN_1(x) \leq N_2(x) \leq bN_2(x)$ (esto es: son equivalentes)

14. Sean E un espacio de Banach y $S,\ T$ subespacios cerrados, con $\dim T < \infty$. Probar que $S + T$ es cerrado.

15. (Lema de Riesz) Sean E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio vectorial cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$. Probar que existe $x_\alpha \in E - S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha \ \forall s \in S$.

Sug: Considerar $x \notin S,\ r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

16. Sean E un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2,\ n \neq m$. Deducir que $\overline{B_1(0)}$ no es compacta. (Sugerencia: aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita)

17. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $H \subset E$ un subespacio. Probar que H es un hiperplano si y sólo existe $\gamma : E \to \mathbb{R}(o\ \mathbb{C})$ lineal , $\gamma \neq 0$ tal que $H = Nu(\gamma)$. Probar que H es cerrado si y sólo si γ es continua.

18. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable. (Sugerencia: sino se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.)