Práctica 8

Ejercicio 1.

i) *Teorema de Rolle.* Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, derivable en (a, b). Probar que si $f(a) = f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

ii) *Teorema de Lagrange.* Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, derivable en (a, b). Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

iii) *Teorema de Cauchy.* Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Probar que existe $c \in (a, b)$ tal que $(f(b) - f(a)) \,.\, g'(c) = (g(b) - g(a)) \,.\, f'(c)$.

Ejercicio 2. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Probar que si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en (a, b). Mostrar con un ejemplo que no vale la recíproca.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y tal que f' es acotada. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 4. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en (a, b), derivable en $(a, b) - \{x_0\}$ y tal que los límites laterales de f' en x_0 existen y son finitos.

i) Probar que f es derivable lateralmente en x_0. Deducir que si ambos límites laterales coinciden, entonces f es derivable en x_0 y calcular $f'(x_0)$.

ii) Mostrar que los resultados de i) pierden validez si se omite hipótesis de continuidad de f en x_0.

Ejercicio 5. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que f es derivable en (a, b) y que posee derivadas laterales finitas $f'_+(a) \neq f'_-(b)$ en los extremos del intervalo. Probar que si λ es un número real comprendido entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \lambda$.

Ejercicio 6. Sean E y F espacios de Banach, sea $A \subset E$ abierto no vacío y sea $f : A \longrightarrow F$. Probar que si f es diferenciable en $x_0 \in A$, existen $\delta > 0$ y $c \geq 0$ tales que $B(x_0, \delta) \subset A$ y $\|f(x) - f(x_0)\| \leq c\|x - x_0\|$ para todo $x \in B(x_0, \delta)$.

Ejercicio 7. Sea $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$. Probar que f es diferenciable y calcular su diferencial.

Ejercicio 8. Sea E un espacio de Banach. Sean $x_1, x_2 \in E$ y sea $A \subset E$ un abierto que contiene al segmento que une x_1 y x_2.

i) Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Probar que existe x en el segmento que une x_1 y x_2 tal que $f(x_1) - f(x_2) = Df(x)(x_1 - x_2)$.

ii) Mostrar con un ejemplo que el resultado no vale para funciones vectoriales.

iii) Sea F un espacio de Banach y sea $f : A \longrightarrow F$ una función diferenciable que verifica $\|Df(x)\| \leq M$ para todo $x \in A$. Probar que $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$.

Ejercicio 9. Sean E y F espacios de Banach. Sea $A \subset E$ un abierto conexo y sea $f : A \longrightarrow F$ una función diferenciable. Probar que si $Df(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces f es constante en A.

Ejercicio 10. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación que satisface $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$ para todo par de puntos $x, y \in U$. Probar que f es constante.

Ejercicio 11. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales acotadas. Probar que f es continua.

Ejercicio 12. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Probar que existen las derivadas parciales de f en todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pero que f no es continua en $(0,0)$.

Ejercicio 13. Sean E y F espacios de Banach. Sea $f : E \longrightarrow F$ diferenciable en $x_0 \in E$. Probar que para cada $v \in E$ existe la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ y vale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Df(x_0)(v)$.

Ejercicio 14.

i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Probar que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y para cada $v \in \mathbb{R}^2$, existe la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x,y)$, pero que la aplicación $v \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ no es lineal (y por lo tanto f no es diferenciable en el punto $(0,0)$).

ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Probar que para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y para cada $v \in \mathbb{R}^2$, existe la derivada direccional $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ y que la aplicación $v \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ es lineal, pero que f no es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Ejercicio 15. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Mostrar que $f'(0) = 1$ y f' es acotada en $(-1, 1)$, pero que sin embargo f no es biyectiva en ningún entorno de $t = 0$.
Deducir que la continuidad de f' en el punto es necesaria en el teorema de la función inversa, incluso en el caso $n = 1$.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

i) Verificar que f no es inyectiva.

ii) Comprobar que el jacobiano de f es no nulo en todo punto de $\mathbb{R}^2$. Deducir que f es localmente inyectiva.

Ejercicio 17. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con jacobiano no nulo en todo $x \in U$.

i) Probar que f es abierta.

ii) Probar que para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto discreto.

Ejercicio 18. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 y + e^x + z$.

i) Comprobar que $f(0, 1, -1) = 0$ y $D_1 f(0, 1, -1) \neq 0$.

ii) Deducir la existencia de un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, -1)$ y una función $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(g(y, z), y, z) = 0$ para todo $(y, z) \in U$.

iii) Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, -1, g(1, -1))$.

Ejercicio 19. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(1, 2, 0)$ es solución de la ecuación $F(xz, y - 2x) = 0$.

i) Hallar condiciones suficientes para que existan un entorno $W \subset \mathbb{R}^2$ del punto $(1, 0)$ y una función $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $\varphi(1, 0) = 2$ y $F(x, z, \varphi(x, z) - 2x) = 0$ para todo $(x, z) \in W$.

ii) Probar que $x \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) - y \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = 2x$ para todo $(x, y) \in W$.

Ejercicio 20.

1. Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1, $S_a = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) = a\}$ y $x_0 \in S_a$. Probar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0)$ es ortogonal a S_a en x_0 (i.e. $\nabla f(x_0)$ es ortogonal al hiperplano tangente a S_a que pasa por x_0).

2. (multiplicadores de Lagrange) Sea $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ de clase C^1, si g restringida a S_a alcanza su máximo (o mínimo) en el punto x_0 y $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla g(x_0) = \lambda \nabla f(x_0)$.