Cálculo Avanzado — 16 de octubre de 2002

Apellido: ________________ *Carrera:* ________
Nombres: ________________ *L.U./Año:* ________

Primer Parcial

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Calificación**

1. Sea $(x_n) \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada con la siguiente propiedad:
Para cada $m \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$F_m = \{k \in \mathbb{N} : k \geqslant m \text{ y } x_k \leqslant x_m\}$$

es finito.
Probar que (x_n) es convergente.

2. Determinar el cardinal de los siguientes conjuntos:

a) $\{(x_n) \subset \mathbb{Q} : (x_n) \text{ es de Cauchy}\}$

b) $\{(x_n) \subset \mathbb{Q} : (x_n) \text{ no es de Cauchy}\}$

3. (X, d) espacio métrico. Probar que son equivalentes:

a) Si $\{B_i\}_{i \in I}$ es una familia de abiertos densos en X entonces $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$.

b) Si $X = \bigcup_{i \in I} F_i$, F_i cerrados entonces existe $i_0 \in I$ tal que $F_{i_0}^{\circ} \neq \emptyset$.

4. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y $f : X \to Y$ una función continua y suryectiva.
Probar que si X es separable entonces Y es separable.

5. Sea (X, d) espacio métrico. Decidir si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos justificando la respuesta.

a) $K \subset X$ compacto tal que $K \subset B(x, 1)$. Entonces existe $0 < r < 1$ tal que $K \subset B(x, r)$.

b) $A \subset X$ compacto entonces ∂A es compacto.[1]

c) $A \subset X$ tal que ∂A es compacto entonces A es compacto.

d) $f : \mathbb{R}^n \to X$ continua. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado entonces $f(A)$ es acotado.[2]

---

[1] $\partial A = \overline{A} - A^{\circ}$.

[2] Se sobrentiende $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclidea.