CÁLCULO AVANZADO 4 DE DICIEMBRE DE 2002

Apellido: ________________ *Carrera:* ________

*Nombres:*________________ *L.U./Año:*________

SEGUNDO PARCIAL

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**Calificación**

1. (X, d) espacio métrico, $A, B \subset X$ conexos e

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\|_2 < 1 \vee 1 < \|(x, y)\|_2 \leqslant 2 \vee 3 \leqslant \|(x, y)\|_2\}.$$

Probar que si $f : A \cup B \to Y$ es continua entonces no es suryectiva.

2. a) (X, d), (Y, d') y $(Z, \overline{d})$ espacios métricos. Sean $f_n : Y \to Z$ y $g_n : X \to Y$ funciones tales que $f_n \rightrightarrows f$ y $g_n \rightrightarrows g$. Si, además, f es uniformemente continua en Y, probar que $f_n \circ g_n \rightrightarrows f \circ g$.

b) Considere $f_n = x^2$ y $g_n = x + \frac{1}{n}$ para mostrar que la hipótesis de continuidad uniforme es necesaria.

3. Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|}$ converge.

a) Sea $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Probar que existe n_0 tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $2|x| \leqslant |a_n|$, $\forall x \in K$.

b) Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$ es absoluta y uniformemente convergente en todo compacto que no contenga a ningún a_n.

4. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ compacto y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función C^1 tal que $Df(x)$ es inversible para todo $x \in E$.

Probar que conjunto $\{x \in E : f(x) = 0\}$ es finito.

5. Sean $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ y $f : B \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable tal que $\|Df(z)\| \leqslant M$ para todo $z \in B$.

a) Si $x_n \in B$ tal que $x_n \to x$ probar que existe $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$.

b) Demostrar que f se extiende de manera única a una función continua $F : \overline{B} \to \mathbb{R}^m$.