

## PRÁCTICA 1

1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos

$$\text{a) } B - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$$

$$\text{b) } B - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B - A_i)$$

$$\text{c) } \bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) = B \cap \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right)$$

2. Sea  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Hallar una colección  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  que verifique

$$\text{a) } B_k \cap B_j = \emptyset \text{ si } k \neq j$$

$$\text{b) } A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$$

3. Sea  $f : X \longrightarrow Y$  una función y sean  $A$  y  $B$  subconjuntos de  $X$ . Demostrar que

$$\text{a) } f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$\text{b) } f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$$

Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

c) Hallar un ejemplo donde la inclusión de **b)** sea estricta.

4. Sean  $f : X \longrightarrow Y$ ,  $A \subset X$  y  $B, B_1, B_2 \subset Y$ . Demostrar que

$$\text{a) } A \subset f^{-1}(f(A))$$

$$\text{b) } f(f^{-1}(B)) \subset B$$

$$\text{c) } f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

$$\text{d) } f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$$

$$\text{e) } f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2) \text{ }^1$$

f) Generalizar **d)** y **e)** al caso de uniones e intersecciones infinitas.

<sup>1</sup>cf. inciso b) del ejercicio 1

5. Sea  $f : X \longrightarrow Y$ . Probar que  $f(f^{-1}(B)) = B$  para cada  $B \subset Y$  si y sólo si  $f$  es suryectiva.
6. Sea  $f : X \longrightarrow Y$ . Probar que las siguientes propiedades son equivalentes
- $f$  es inyectiva
  - $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  para todo  $A, B \subset X$
  - $f^{-1}(f(A)) = A$  para todo  $A \subset X$
  - $f(A) \cap f(B) = \emptyset$  para todo par de subconjuntos  $A, B$  tales que  $A \cap B = \emptyset$
  - $f(A - B) = f(A) - f(B)$  para todo  $B \subset A \subset X$
7. Para cada subconjunto  $S$  de un conjunto  $A$  dado se define  $\chi_S : A \longrightarrow \{0, 1\}$  **función característica** de  $S$  por  $\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & a \notin S \end{cases}$ . Probar:
- $\chi_{S \cap T} = \chi_S \cdot \chi_T$  para todo  $S, T \subset A$
  - $\chi_{A-S} = 1 - \chi_S$  para todo  $S \subset A$
  - $\chi_S + \chi_T = \chi_{S \cup T} + \chi_{S \cap T}$  para todo  $S, T \subset A$
8. Sea  $\sim$  una relación de equivalencia sobre un conjunto  $A$ . Para cada  $a \in A$  se define el conjunto  $S_a = \{b \in A / a \sim b\}$ . Probar que
- para todo  $a_1, a_2 \in A$  es:  $S_{a_1} = S_{a_2}$  o  $S_{a_1} \cap S_{a_2} = \emptyset$
  - $A = \bigcup_{a \in A} S_a$
9. Demostrar que si  $A$  es un conjunto de  $n$  elementos, entonces  $\mathcal{P}(A)$  tiene  $2^n$  elementos.
10. Probar que los siguientes conjuntos son numerables <sup>2</sup>
- $\mathbb{Z}$  ;  $\mathbb{Z}_{\geq -3}$  ;  $\mathbb{Z}_{\leq -1}$  ;  $3\mathbb{N}$  ;  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  ;  $\mathbb{Q}^2$  ;  $\mathbb{N}^3$  ;  $\mathbb{N}^m$  ( $m \in \mathbb{N}$ )
11. Sea  $A$  un conjunto con  $\#A = \aleph_0$ . Probar que

$$\#(A^n) = \#(A \times \dots \times A) = \#(A) = \aleph_0$$

---

<sup>2</sup>i.e., tienen cardinal  $\aleph_0$

12. a) Sean  $A$  y  $B$  a lo sumo numerables<sup>3</sup>. Probar que  $A \cup B$  es a lo sumo numerable.  
 b) Sea  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de conjuntos a lo sumo numerables. Probar que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es numerable.

13. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

14. Se dice que un número complejo  $z$  es **algebraico** si existen enteros  $a_0, \dots, a_n$  —no todos nulos— tales que

$$a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n = 0$$

- a) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.  
 b) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

NOTA: estos números se llaman **trascendentes**.

15. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona. Probar que

$$\#(\{x \in \mathbb{R} / f \text{ no es continua en } x\}) \leq \aleph_0$$

16. ¿Es numerable el conjunto  $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ?

17. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones

- a)  $\{(a_n) / a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$   
 b)  $\{(a_n) \subset \mathbb{N} / a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$   
 c)  $\{(a_n) \subset \mathbb{N} / a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$   
 d)  $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} / \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0\}$   
 e)  $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} / (q_n) \text{ es periódica}\}$ <sup>4</sup>  
 f)  $\{(a_n) \subset \mathbb{N} / 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \quad (m \in \mathbb{N})$

18. Sean  $a, b, c$  cardinales. Probar:

a)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

<sup>3</sup>X se dice a lo sumo numerable si es finito o su cardinal es  $\aleph_0$

<sup>4</sup>i.e., existen  $m, k \in \mathbb{N}$  tales que  $q_n = q_{n+k}$  para todo  $n \geq m$ .

- b)  $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$   
 c)  $(a^b)^c = a^{bc}$   
 d)  $(ab)^c = a^c \cdot b^c$   
 e) si  $b \leq c$ , entonces  $a^b \leq a^c$  y  $b^a \leq c^a$

19. Probar que

$$n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$$

cualquiera sea  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ .

20. Siendo

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f / f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{F}(\mathbb{Q}) = \{f / f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) / f \text{ es continua}\}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) / f \text{ es continua}\}$$

- a) Probar que  $\#(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$ .  
 b) Calcular  $\#(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$ .  
 c) Calcular  $\#(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$ .  
 d) Probar que la función  $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$  dada por  $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$  es inyectiva.  
 e) Calcular  $\#(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$ .

21. Dado  $x \in [0, 1]$ , notamos con  $n(x)$  =cantidad de '3' en el desarrollo decimal –sin colas de 9– de  $x$ . Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n(x) = +\infty \\ \frac{1}{n(x)} & \text{si } n(x) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- a) ¿Es numerable el conjunto  $A = \{x \in [0, 1] / f(x) = 0\}$ ?  
 b) ¿Es cerrado el conjunto  $B = \{x \in [0, 1] / f(x) = 1\}$ ?  
 c) ¿Es abierto el conjunto  $C = \{x \in [0, 1] / f(x) \neq 0\}$ ?

22. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos

- a)  $\{I / I \text{ es un intervalo de extremos racionales}\}$   
 b)  $\{[a, b] / a, b \in \mathbb{R}\}$   
 c)  $I$ , sabiendo que  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$  es una familia de intervalos disjuntos  
 d)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 3x + 2y \geq 7\}$

e)  $\mathbb{R} - \{0\}$

f)  $\mathbb{R} - \{e, \pi\}$

**23.** Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto finito y  $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$ . Probar que  $\#(\mathcal{S}) = \aleph_0$ .

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos.