Práctica 2

1. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos o cerrados

$$\mathbb{Z} \quad , \quad \{\tfrac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\} \quad , \quad \mathbb{Q} \quad , \quad [0,1) \quad , \quad \mathbb{R}_{\geqslant 0} \quad , \quad \{x \in \mathbb{R} \ / \ x^3 < 2\}$$

2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado que contiene a todos los racionales del intervalo $(0,1)$. Probar que $[0,1] \subset A$.

3. Mostrar que si se reemplaza la condición de *cerrados* por la de *abiertos* en el teorema de encaje de intervalos, la conclusión deja de ser cierta.

4. **a)** Probar que toda familia de abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es necesariamente numerable. Dar un ejemplo de una familia de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

b) Probar que el conjunto de puntos aislados de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable.

5. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ por:

$$d_1(x,y) = (x-y)^2 \quad , \quad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} \quad , \quad d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x,y) = |x - 2y| \quad , \quad d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

6. Sean (S_1, d_1) y (S_2, d_2) espacios métricos. Consideremos la aplicación $d : (S_1 \times S_2) \times (S_1 \times S_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$. Probar que d define una métrica en $S_1 \times S_2$. Construir otras métricas en $S_1 \times S_2$.

7. **a)** Si (X,d) es un espacio métrico, se define: $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d' también es una métrica en X.

Observar que $0 \leqslant d'(x,y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

b) Sea X un conjunto y d_1, d_2 dos métricas en X. Entonces, la función $d_1 + d_2$ es una métrica en X. ¿Y $d_1 - d_2$?

c) Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que $0 \leqslant d_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ definimos:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

d) Sea (X,d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostar que $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico.

8. Probar que (M,d) es un espacio métrico para

a) $M = \mathbb{R}^n \quad$ y $\quad d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

b) $M = \mathbb{R}^n \quad$ y $\quad d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$

c) $M = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua}\} \quad$ y $\quad d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx$

d) Sea $\ell^\infty = \{(a_n) \subset \mathbb{R} \ / \ (a_n) \text{ es acotada}\}$. Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico para $d((a_n),(b_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$

e) $M = \mathbb{Z} \quad$ y $\quad d(a,b) = N(a-b)$ donde $N : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ está dada por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si} \quad p^n \mid a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \not| \, a \quad (a \neq 0) \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

y p es un primo fijo.

9. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X,δ).

NOTA: δ se llama ***métrica discreta*** y (X,δ) ***espacio métrico discreto***.

10. Sea $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por: $d_\infty(x,y) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$.

a) Probar que d_∞ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

b) Caracterizar la bola abierta de centro a y radio r para esta métrica.

c) Si ρ es la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$, mostrar que d_∞ y ρ definen la misma topología, i.e., un conjunto es abierto para d_∞ si y sólo si lo es para ρ.

11. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

a) $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{V \text{abierto} \\ V \subset A}} V \quad$ para todo $A \subset X$

b) $\overset{\circ}{A} \subset A \qquad$ ¿cuándo vale la igualdad?

c) $\overset{\circ}{\varnothing} = \varnothing \qquad$ y $\qquad \overset{\circ}{X} = X$

d) $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$

e) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$

¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

f) ¿Qué se puede decir de $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$?

g) $\overset{\circ}{\overbrace{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$

12. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

a) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{V \text{cerrado} \\ A \subset V}} V \quad$ para todo $A \subset X$

b) $A \subset \overline{A} \qquad$ ¿cuándo vale la igualdad?

c) $\overline{\varnothing} = \varnothing \qquad$ y $\qquad \overline{X} = X$

d) $A \subset B \quad \Longrightarrow \quad \overline{A} \subset \overline{B}$

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

¿Se puede generalizar a una unión infinita?

f) ¿Qué se puede decir de $\overline{A \cap B}$?

g) $x \in \overline{A} \quad \Longleftrightarrow \quad$ existe $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \longrightarrow x$

h) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

13. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar:

a) $\overset{\circ}{\overbrace{X - A}} = X - \overline{A}$

b) $\overline{X - A} = X - \mathring{A}$

c) ¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{\mathring{A}}$, $\mathring{A} = \mathring{\overline{A}}$?

14. Sea (X, d) un espacio métrico y A, B subconjuntos de X. Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

a) A' es cerrado

b) $\overline{A} = A \cup A'$

c) $A \subset B \implies A' \subset B'$

15. Ses (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto.

a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$

b) ∂A es cerrado

c) $\partial A = \partial(X - A)$

16. Calcular la clausura (en $\mathbb{R}$) de:

$[0, 1]$; $(0, 1)$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$; $\mathbb{Z}$; $[0, 1) \cup \{2\}$

17. Sea (M, d) un espacio métrico. Dados $a \in M$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in M \ / \ d(x, a) \leqslant r\}$.

a) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subset \overline{B}(a, r)$.

b) Dar un ejemplo de una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

c) Probar que en $(\mathbb{R}^n, d)$ —siendo d cualquiera de las métricas del ejercicio 8— vale que $\overline{B(a, r)} = \overline{B}(a, r)$ para todo $r > 0$.

18. Pensando a $\mathbb{Z}$ como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$, caracterizar los abiertos y los cerrados. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

19. Sea (M, d) un espacio métrico y sean (x_n) , (y_n) sucesiones en M.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

b) Si (x_n) , (y_n) son dos sucesiones de Cauchy en M, probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))$ es convergente.

20. Probar que todo subespacio completo de un espacio métrico es cerrado.

21. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subset X$ y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* por $d_A(x) = \text{ínf}\{d(x, a) \ / \ a \in A\}$. Probar:

a) $\left|d_A(x) - d_A(y)\right| \leqslant d(x, y)$

b) $x \in A \quad \Longrightarrow \quad d_A(x) = 0$

c) $d_A(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A}$

d) $B_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) \leqslant r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

f) $B_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) > r\}$ es abierto para todo $r > 0$

g) $B_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) \geqslant r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

22. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

a) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ

b) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ

c) Probar que todo cerrado es un G_δ
Deducir que todo abierto es un F_σ

d) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$

e) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$.
¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?

23. Si $\mathbb{R}^n = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, donde F_k es cerrado en $\mathbb{R}^n$, entonces al menos uno de los F_k tiene interior no vacío.

24. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subset X$ –no vacíos– se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) \ / \ a \in A \ , \ b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$

b) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \varnothing$

c) $d(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \varnothing$

25. Dado un espacio métrico (M, d), un subconjunto A de M se dice ***denso en*** M si $\overline{A} = M$ y decimos que un espacio métrico es ***separable*** si contiene un subespacio denso y numerable.

Probar que $\mathbb{R}^n$ es separable.

26. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) M es separable

b) Existe una familia numerable $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos de M tal que todo abierto de M es unión de abiertos de $\mathcal{U}$

c) Existe una familia numerable $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos de M tal que para todo $x \in M$ y todo entorno V de x en M vale que $x \in U_m \subset V$, para algún $m \in \mathbb{N}$

Concluir que en un espacio métrico separable, de todo cubrimiento por abiertos se puede extraer un subcubrimiento numerable.

Este resultado se conoce como *teorema de Lindelöff*.

Generalizar el ejercicio 4**b)** a un espacio métrico separable.