Práctica 6

1. a) En cada uno de los casos siguientes, hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida en el conjunto $A \subset \mathbb{R}$ dado

(i) $f_n(x) = x^n \qquad A = (-1, 1]$

(ii) $f_n(x) = \dfrac{e^x}{x^n} \qquad A = (1, +\infty)$

(iii) $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n \qquad A = [0, 1]$

b) Para la sucesión dada en (i), demostrar que la convergencia es uniforme sobre $B = (0, \frac{1}{2})$.

Idem para la sucesión dada en (ii) sobre $B = [2, 5]$.

¿Es uniforme la convergencia de la sucesión dada en (iii) sobre A? ¿Sobre algún otro subconjunto de $\mathbb{R}$?

2. Sean (X, d) un espacio métrico y A un conjunto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^A$ una sucesión de funciones que converge puntualmente a f en A. Se supone que existen un número $\alpha > 0$ y una sucesión $(a_n) \subset A$ tales que $d(f_n(a_n), f(a_n)) \geqslant \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Probar que (f_n) no converge uniformemente a f sobre A.

3. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones

a) $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen} nx}{n}$ en $\mathbb{R}$

b) $f_n(x) = \operatorname{sen}(\frac{x}{n})$ en $\mathbb{R}$

c) $f_n(x, y) = \dfrac{n}{n+1}(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$

d) $f_n(x, y) = n(x^2 - y^2, 2xy)$ en $\mathbb{R}^2$

e) $f_n(x) = (1 + \frac{1}{n})x$ en $[0, 1]$

f) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \text{ ó } x = 0 \\ b + \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{a}{b}\ , b > 0 \text{ y } (a : b) = 1 \end{cases}$ en $[0, 1]$

4. Probar que la sucesión de funciones $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + x^2} - \dfrac{x(x^2 + 1)}{1 + (n + 1)^2 x^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ converge puntualmente pero no uniformemente, sobre $\mathbb{R}$, a una función continua.

5. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones de clase C^1 tal que

- $\star$ $(f'_n)_{n\geqslant 1}$ converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$ a una función g
- $\star$ existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $(f_n(x_0))_{n\geqslant 1}$ converge a un valor y_0.

Probar que:

a) existe una función continua f tal que $f_n \longrightarrow f$ en $\mathbb{R}$ y $f(x_0) = y_0$.

b) f es derivable y $f' = g$.

6. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ una sucesión de funciones uniformemente continuas que converge uniformemente a una función f sobre $\mathbb{R}$. Analizar la continuidad uniforme de f.

7. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ y f'_n en $[-1, 1]$.

8. Sean (X, d) un espacio métrico y $(f_n), (g_n) \subset \mathbb{R}^X$ dos sucesiones de funciones continuas uniformemente convergentes sobre X. Probar que

a) $(f_n + g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre X.

b) si además ambas sucesiones están uniformemente acotadas, entonces $(f_n.g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente.

9. Sea X un conjunto y sea $B(X) = \{g : X \longrightarrow \mathbb{R} : g \text{ es acotada } \}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X)$.

(a) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función f en X, ¿es cierto que $f \in B(X)$?

(b) Probar que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente en X, entonces existe $M > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq M \ \forall x \in X \ \forall n \in \mathbb{N}$, es decir, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada.

10. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ y sea $f : X \to \mathbb{R}$ continua. Probar que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a f si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge a $x \in X$, la sucesión $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.

11. ¿Es cierto que

a) si $\overline{\lim} x_n = 2$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > 1,99$ para todo $n \geqslant n_0$?

b) si $\overline{\lim} x_n = b$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \leqslant b$ para todo $n \geqslant n_0$?

12. Consideremos la sucesión definida por $x_n = (1/2)^n$ para n par y $x_n = (1/3)^n$ para n impar. Calcular el límite superior e inferior de las sucesiones x_{n+1}/x_n y $x_n^{1/n}$. Analizar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Idem para la sucesión definida por $x_{2n} = (1/2)^n$ y $x_{2n-1} = (1/3)^n$, para todo n natural. Idem para la sucesión definida por $x_n = (1/2)^n$ para n par y $x_n = 0$ para n impar. Idem para la sucesión definida por $x_n = 1/n$ para n una potencia de 2 y $x_n = 0$ en otro caso.

13. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, probar que también lo hacen las siguientes series:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \quad , \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2} \ .$$

14. Criterio de la Integral

Sea $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ decreciente, continua y tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ se definen

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \qquad T_n = \int_1^n f(x)\, dx \qquad D_n = S_n - T_n$$

Probar que:

a) $0 < f(n+1) \leqslant D_{n+1} \leqslant D_n \leqslant f(1)$, para $n \in \mathbb{N}$

b) Existe $D = \lim\limits_{n \to +\infty} D_n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge si y sólo si $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge

d) $0 \leqslant D_n - D \leqslant f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

15. Probar

a) $\sum_{k=1}^{n} a_n b_n = A_n b_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$, siendo $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

c) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tiene las sumas parciales acotadas, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_{n+1} - b_n)$ converge absolutamente y $b_n \longrightarrow 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ converge.

d) (Criterio de Leibniz) Si $b_n > 0$ decreciente y $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ converge.

16. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente. Probar que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$ convergen uniformemente en $\mathbb{R}$.

17. Sea $S = \{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la familia de números naturales tales que **no** tienen al "0" en su representación decimal. Por ejemplo, $7 \in S$ pero $101 \notin S$.

Mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ converge a un número menor o igual que 90.

18. Estudiar la convergencia de la serie [1]

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{6} \dots$$

Si converge, calcular el valor de la suma.

19. Mostrar que la serie

a) $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2k+1)!}\, x^{2k+1}$ converge uniformemente sobre todo intervalo finito.

b) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2$ es continua en $\mathbb{R}$.

20. Sea $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + (nx)^2}$.

¿Para qué valores de x es absolutamente convergente esta serie?

¿Sobre qué intervalos converge uniformemente?

¿Sobre qué intervalos no converge uniformemente?

¿Es f continua en su dominio?

¿Es f acotada?

[1] Extraído de la Competencia Paenza - XV Realización.