Práctica 7

1. **a)** Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Probar que f es creciente en (a, b) si y sólo si $f' \geqslant 0$ en (a, b).

   b) Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable. Probar que si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente en (a, b). Mostrar con un ejemplo que no vale la recíproca.

2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y tal que f' es acotada. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

3. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en (a, b), derivable en $(a, b) - \{x_0\}$ y tal que los límites laterales de f' en x_0 existen y son finitos.

   i) Probar que f es derivable lateralmente en x_0. Deducir que si ambos límites laterales coinciden, entonces f es derivable en x_0 y calcular $f'(x_0)$.

   ii) Mostrar que los resultados de i) pierden validez si se omite hipótesis de continuidad de f en x_0.

4. Sean $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en (α, β) y $\alpha < a < b < \beta$ tal que $f'(a) \neq f'(b)$.

   (a) Probar que si $f'(a) < 0 < f'(b)$ entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

   (b) Probar que si λ es un número real comprendido entre $f'(a)$ y $f'(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \lambda$.

   (c) Sea $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$

   $$f(t) = \begin{cases} (t^2 \sin(1/t), t^2 \cos(1/t) & si \quad 0 < t < 1 \\ (0,0) & si \quad -1 < t \leqslant 0 \end{cases}$$

   Probar que para todo $t \in (-1, 1)$ existe $f' = (f_1', f_2')$ pero $f'((-1, 1))$ no es conexo.

5. Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Se dice que f es ***convexa*** si para todo $x, y \in (a, b)$ y todo $t \in (0, 1)$ es

   $$f(t.x + (1 - t).y) \leqslant t.f(x) + (1 - t).f(y)$$

   Si f es derivable, demostrar que f es convexa si y sólo si f' es monótona creciente.

   Comprobar que si además existe f'' entonces, f es convexa si y sólo si $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a, b)$.

6. Sea $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable en $x = 0$. Dadas dos sucesiones $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (-1,1)$ que convergen a 0 y tales que $\alpha_n < \beta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se define

$$D_n = \frac{f(\alpha_n) - f(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n}$$

Demostrar que

a) si $\alpha_n < 0 < \beta_n$ para todo n, entonces $D_n \longrightarrow f'(0)$

b) si $0 < \alpha_n$ para todo n y $\left(\dfrac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n}\right)$ está acotada, entonces $D_n \longrightarrow f'(0)$

c) si f es de clase C^2 en $(-1,1)$, entonces $D_n \longrightarrow f'(0)$.

7. Sean $E \subset \mathbb{R}^n$ un bola abierta y $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^m$ una aplicación que satisface

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x - y\|^2$$

para todo $x, y \in E$. Demostrar que f es constante. Vale este resultado si E es cualquier abierto de $\mathbb{R}^n$?

8. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable.

a) Probar que si f alcanza un extremo en $x_0 \in U$, entonces $Df(x_0) \equiv 0$.

b) Mostrar que si $\bar{U}$ es compacto y f es continua en $\bar{U}$ y f es constante en ∂U, entonces existe $x_0 \in U$ tal que $Df(x_0) \equiv 0$.

9. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots\ldots, f_m)$.

(a) Probar que si existen y son continuas las derivadas parciales de cada $f_i : U \to \mathbb{R}$, entonces f es diferenciable.

(b) Si f es diferenciable consideremos la función D que a cada $x \in U$ le asigna la transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ $D(f)(x)$.

Probar que $D : U \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ (este último con la norma de operadores) es continua si, y sólo si, son continuas las derivadas parciales de cada f_i.

10. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + \dfrac{1}{2(1+x^2)}$. Probar que f es un difeomorfismo local alrededor de cualquier $x_0 \in \mathbb{R}$.

Encontrar un intervalo alrededor de $x_0 = 0$ en el cual f sea difeomorfismo.

11. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Mostrar que $f'(0) = 1$ y f' es acotada en $(-1, 1)$, pero que sin embargo f no es biyectiva en ningún entorno de $t = 0$.

Deducir que la continuidad de f' en el punto es necesaria en el teorema de la función inversa, incluso en el caso $n = 1$.

12. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con jacobiano no nulo en todo $x \in U$.

    i) Probar que f es abierta.

    ii) Probar que para cada $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(y)$ es un conjunto discreto.

13. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2y + e^x + z$.

    i) Comprobar que $f(0, 1, -1) = 0$ y $D_1f(0, 1, -1) \neq 0$.

    ii) Deducir la existencia de un entorno $U \subset \mathbb{R}^2$ de $(1, -1)$ y una función $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $f(g(y, z), y, z) = 0$ para todo $(y, z) \in U$.

    iii) Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de g en el punto $(1, -1, g(1, -1))$.

14. Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que $(1, 2, 0)$ es solución de la ecuación $F(xz, y - 2x) = 0$.

    i) Hallar condiciones suficientes para que existan un entorno $W \subset \mathbb{R}^2$ del punto $(1, 0)$ y una función $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 tales que $\varphi(1, 0) = 2$ y $F(x, z, \varphi(x, z) - 2x) = 0$ para todo $(x, z) \in W$.

    ii) Probar que $x\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) - y\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y) = 2x$ para todo $(x, y) \in W$.

15. **a)** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable y tal que $f'(x) \neq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene a lo sumo un punto fijo.

    b) Mostrar que si bien la función $f(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ satisface $0 < f'(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$, no tiene ningún punto fijo.

    c) Explicar por qué esto no contradice el teorema del punto fijo.

16. Verificar que la función $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{3}$ tiene tres puntos fijos α, β y γ que satisfacen

    $$-2 < \alpha < -1 \quad , \quad -1 < \beta < 1 \quad , \quad 1 < \gamma < 2$$

    Si se escoge arbitrariamente $x_1 \in \mathbb{R}$ y se define la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$, probar que

    a) si $x_1 < \alpha$, entonces $x_n \longrightarrow -\infty$

    b) si $\alpha < x_1 < \gamma$, entonces $x_n \longrightarrow \beta$

c) si $\gamma < x_1$, entonces $x_n \longrightarrow +\infty$

Concluir que por este método sólo puede localizarse β.

17. Dado $\alpha > 0$, se elige $x_1 > \sqrt{\alpha}$ y se define recursivamente la sucesión (x_n) por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\Big)$$

a) Demostrar que (x_n) es decreciente y que converge a $\sqrt{\alpha}$.

b) Sea $\varepsilon_n = x_n\sqrt{\alpha}$. Mostrar que

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

c) Deducir que

$$\varepsilon_{n+1} < \beta\left(\frac{\varepsilon_1}{\beta}\right)^{2^n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y donde $\beta = 2\sqrt{\alpha}$.

d) Si $\alpha = 3$ y $x_1 = 2$, mostrar que $\frac{\varepsilon_1}{\beta} < \frac{1}{10}$ y que por lo tanto

$$\varepsilon_5 < 4.10^{-16} \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_6 < 4.10^{-32}$$

Esto muestra que este algoritmo tiene una forma sencilla de recurrencia y converge muy rápidamente.

18. Sea f una función dos veces derivable en el intervalo real $[a,b]$ tal que

    ▷ $f(a) < 0 < f(b)$

    ▷ $f' \geqslant \delta > 0$ y $0 \leqslant f'' \leqslant M$ para todo $x \in [a,b]$

    Sea ξ el único punto de (a,b) en el cual $f(\xi) = 0$.

    Completar el siguiente esbozo del ***método de Newton*** para calcular ξ.

    (1) Escoger $x_1 \in (\xi, b)$ y definir la sucesión (x_n) por medio de

    $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

    Interpretar esto geométricamente en términos de la tangente al gráfico de f.

    (2) Demostrar que $x_{n+1} < x_n$ y que $x_n \longrightarrow \xi$

    (3) Usar el Teorema de Taylor para mostrar que

    $$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2$$

    para algún $t_n \in (\xi, x_n)$.

    (4) Deducir que

    $$0 \leqslant x_{n+1} - \xi \leqslant \frac{2\delta}{M}\left[\frac{2\delta}{M}(x_1 - \xi)\right]^{2^n}$$

    Comparar con el ejercicio anterior.

    (5) Mostrar que el método de Newton es significativo para encontrar un punto fijo de la función

    $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

    ¿Cómo se comporta $g'(x)$ cuando x está muy cerca de ξ?

    (6) Aplicar el método de Newton a la función $f(x) = x^{1/3}$ sobre $\mathbb{R}$. ¿Qué ocurre?

19. Comprobar que las funciones $f \equiv 0$ y $g(x) = \dfrac{x^2}{4}$ son solución del problema con valores iniciales

    $$y' = y^{1/2} \qquad , \qquad y(0) = 0$$

    ¿Hay otras soluciones? Determinarlas.

    Explicar por qué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad de solución.

20. Formular y demostrar un teorema de unicidad análogo para sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} y_j' = \phi_j(x, y_1, \dots, y_m) \\ \\ y_j(a) = c_j \end{cases} \qquad\qquad j = 1, \dots, m$$

que también puede escribirse en la forma

$$\begin{cases} Y' = \Phi(x, Y) \\ Y(a) = C \end{cases}$$

donde $Y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\Phi : [a, b] \times R \subset \mathbb{R}^{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y $C \in \mathbb{R}^m$.

Generalizar al caso en que $x \in \mathbb{R}^n$.

21. Particularizar el ejercicio anterior considerando el sistema

$$\begin{cases} y_j' = y_{j+1} \\ \\ y_k' = f(x) - \sum_{j=1}^m g_j(x) y_j \end{cases} \qquad\qquad j = 1, \dots, m-1$$

donde $f, g_1, \dots, g_m$ son funciones reales continuas en $[a, b]$ y deducir un teorema de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación

$$y^{(m)} + g_m(x) y^{m-1} + \dots + g_2(x) y' + g_1(x) y = f(x)$$

con las condiciones iniciales

$$y(a) = c_1 \quad , \quad y'(a) = c_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad y^{m-1}(a) = c_m$$

22. Dados $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $X_0 \in \mathbb{R}^n$, verificar que $F(t) = e^{At}.X_0$ es la única solución de $X' = A.X$ que toma el valor X_0 en $t = 0$.