

PRÁCTICA 3

 \mathbb{R}^n como Espacio Métrico

Ejercicio 1. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de \mathbb{R}^n es necesariamente numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

Ejercicio 2. Sea G la colección de todas las bolas $B(q, r)$ de \mathbb{R}^n con centro $q \in \mathbb{Q}^n$ y radio racional r . Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in S$. Probar que $\exists B_k \in G$ tal que $x \in B_k \subseteq S$.

Ejercicio 3. *Teorema de Lindelöf.* Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $C = (W_i)_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de A . Probar que existe un subcubrimiento numerable de C que cubre a A .

Ejercicio 4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda n -bola $B(x)$ tiene la propiedad de que $B(x) \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S .

Ejercicio 5. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, probar que la colección de puntos aislados de S es numerable.

Ejercicio 6. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq 5$) por:

$$d_1(x, y) = (x - y)^2 \quad , \quad d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} \quad , \quad d_3(x, y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x, y) = |x - 2y| \quad , \quad d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en \mathbb{R} .

Ejercicio 7.

i) Probar que las siguientes funciones son métricas en \mathbb{R}^n :

$$(a) \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

$$(b) \quad d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

$$(c) \quad d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

ii) Para $n = 2$, dibujar la bola abierta $B(0, r)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio r .

Espacios Métricos, Topologías

Ejercicio 8. Sea $N : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n \mid a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \nmid a \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

donde p es un primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(a, b) = N(a - b)$. Probar que (\mathbb{Z}, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 9. Sea $\ell^\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \mid (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 10. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$. Probar que son espacios métricos:

- i) $(C[a, b], d_1)$, con $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- ii) $(C[a, b], d_\infty)$, con $d_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 11. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

- i) Probar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$.
- ii) Construir otras métricas en $X_1 \times X_2$.

Ejercicio 12.

- i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d . Observar que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in X$.
- iii) Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \leq d_n(x, y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

- iv) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X . Mostrar que $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico con una distancia conveniente.

Ejercicio 13. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ) .

NOTA: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) *espacio métrico discreto*.

Ejercicio 14. Sean d_∞ y d_2 las métricas en \mathbb{R}^n definidas en el Ejercicio 2. Mostrar que un conjunto es abierto para d_∞ si y sólo si lo es para d_2 .

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$

i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

$$(a) A^\circ = \bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$$

$$(b) \emptyset^\circ = \emptyset \quad \text{y} \quad X^\circ = X$$

$$(c) A \subseteq B \quad \implies \quad A^\circ \subseteq B^\circ$$

$$(d) (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ. \quad \text{¿Se puede generalizar a una intersección infinita?}$$

$$(e) (A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ. \quad \text{¿Vale la igualdad?}$$

ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

$$(a) \bar{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$$

$$(b) \overline{\emptyset} = \emptyset \quad \text{y} \quad \overline{X} = X$$

$$(c) A \subseteq B \quad \implies \quad \bar{A} \subseteq \bar{B}$$

$$(d) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}. \quad \text{¿Se puede generalizar a una unión infinita?}$$

$$(e) \overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$(f) x \in \bar{A} \iff \text{Existe una sucesión } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A \text{ tal que } x_n \rightarrow x$$

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

$$(a) (X - A)^\circ = X - \bar{A}$$

$$(b) \overline{X - A} = X - A^\circ$$

¿Son ciertas las igualdades: $\bar{A} = \overline{A^\circ}$, $A^\circ = (\bar{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

$$(a) \partial A = \bar{A} \cap \overline{X - A}$$

$$(b) \partial A \text{ es cerrado}$$

$$(c) \partial A = \partial(X - A)$$

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F - G$ es cerrado y $G - F$ es abierto.

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X / d(x, a) \leq r\}$.

- i) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{\overline{B}(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$.
- ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

Ejercicio 18. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el Ejercicio 6. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

- i) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$
- ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X .

- i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:
 - (a) A' es cerrado
 - (b) $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$
 - (c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$
 - (d) $\overline{A} = A \cup A'$
 - (e) $(\overline{A})' = A'$
- ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 20. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} . Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0, 1] \quad ; \quad (0, 1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0, 1) \cup \{2\}$$

Ejercicio 21. Caracterizar los abiertos y los cerrados de \mathbb{Z} considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de \mathbb{R} . Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X .

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X .

- i) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.
- ii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X , probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como $d_A(x) = \inf\{d(x, a) / a \in A\}$. Probar:

i) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

ii) $x \in A \implies d_A(x) = 0$

iii) $d_A(x) = 0 \iff x \in \bar{A}$

iv) $B_A(r) = \{x \in X / d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

v) $\bar{B}_A(r) = \{x \in X / d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Ejercicio 24. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X .

i) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ .

ii) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ .

ii) Probar que todo cerrado es un G_δ . Deducir que todo abierto es un F_σ .

iv) (a) Exhibir una sucesión de abiertos de \mathbb{R} cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$.

(b) Exhibir una sucesión de cerrados de \mathbb{R} cuya unión sea $[0, 1)$.

¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \inf\{d(a, b) / a \in A, b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) $d(A, B) = d(\bar{A}, B)$

ii) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$

iii) $d(A, B) = 0 \iff \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$

iv) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$