

Cálculo Avanzado - Práctica 7

Primer cuatrimestre de 2003

Tema: Convergencia Uniforme

1. (a) Hallar el límite puntual de la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida sobre $A \subseteq \mathbb{R}$.
 - i. $f_n(x) = x^n$ $A = (-1, 1]$
 - ii. $f_n(x) = \frac{e^x}{x^n}$ $A = (1, +\infty)$
 - iii. $f_n(x) = n^2 x(1 - x^2)^n$ $A = [0, 1]$(b) Para i) demostrar que la convergencia es uniforme en $A = (0, 1/2]$, idem en ii) con $A = [2, 5]$; Es uniforme la convergencia de iii) en A o en algún sub-intervalo de A ?
2. Analizar la convergencia puntual y uniforme de las siguientes sucesiones de funciones:
 - (a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$
 - (b) $f_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{n}\right)$, $x \in \mathbb{R}$
 - (c) $f_n(z) = \frac{n}{n+1}z$, $z \in \mathbb{C}$
 - (d) $f_n(z) = nz^2$, $z \in \mathbb{C}$
3. Probar que cualquier sucesión de funciones acotadas uniformemente convergente, está uniformemente acotada.
4. Dada $f_n(x) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{(x^2+1)x}{1+(n+1)^2x^2}$, probar que converge puntualmente pero no uniformemente a una función continua.
5. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $(f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $(g_n) : X \rightarrow \mathbb{R}$ convergen uniformemente en $E \subset X$, probar que $(f_n + g_n)$ converge uniformemente en E . Si además (f_n) y (g_n) son uniformemente acotadas, entonces $(f_n g_n)$ es uniformemente convergente. Mostrar con un ejemplo que esta última restricción es necesaria.

6. (a) Sea $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cada una de ellas derivable, que converge uniformemente a una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y f'_n converge uniformemente a una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Probar que f es derivable y que $f' = g$.
- (b) Sea $\sum_{k=0}^{\infty} f_n(x)$ una serie de funciones. ¿ Con qué hipótesis es legítimo derivarla término a término ?
- (c) Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(nx)}{n^2}$$

converge uniformemente en \mathbb{R} , pero que esto no ocurre para la serie obtenida derivando término a término.

7. Hallar (y justificar) los conjuntos en \mathbb{R} de convergencia puntual, uniforme y no convergencia de las siguientes series:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

¿ Qué ocurre con la serie que se obtiene derivando término a término ?

8. Consideramos la función dada por la serie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Probar que la serie converge uniformemente en cada intervalo $(1 + \varepsilon, \infty)$ hacia una función continua, y que es posible derivarla término a término en dicho intervalo.

9. (Teorema de Dini) Sea K compacto y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ que converge puntualmente a $f \in C(K)$. Para cada $x \in K$ se tiene $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Probar que f_n converge uniformemente en K .