Cálculo Avanzado - Práctica 9

Primer cuatrimestre de 2003

Temas: Teorema de Baire , Diferenciación , Teorema de Weierstrass($\mathbb{R}[X]$ es denso en $C[a,b]$)

1. Sea (X,d) espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$.
   (a) Probar que si A es nunca denso, entonces $X - A$ es denso. Vale el recíproco?
   (b) Probar que si A es abierto y denso, entonces $X - A$ es nunca denso.

2. Sea (X,d) espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes
   (a) A es nunca denso.
   (b) Toda bola B abierta contiene otra $B_1 \subset B$ abierta tal que $B_1 \cap A = \emptyset$
   (c) A no es denso en ninguna bola abierta.

3. Sea $Lip[a,b] = \{f \in C[a,b] / \ \exists k > 0, \ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\}$.Probar que $Lip[a,b]^{\circ} = \emptyset$ en $C[a,b]$.

4. Probar que el conjunto de funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía, tiene interior vacío en $C[a,b]$.

5. Para cada una de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^2$ analizar si existen las derivadas parciales, si son diferenciables y si son C^1.

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$g(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$h(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^4}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$. $f(0,0) = g(0,0) = h(0,0) = 0$

6. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1 donde Ω es un abierto convexo. Probar que $|f(x) - f(y)| \leq \|\nabla f(\xi)\| \|x - y\|$ donde ξ pertenece al segmento que une x e y.

7. (a) Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funci'on de clase C^1, $S_a = \{x \in \mathbb{R}^n / \ f(x) = a\}$ y $x_0 \in S_a$. Probar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(x_0)$ es ortogonal a S_a en x_0 (i.e. $\nabla f(x_0)$ es ortogonal al hiperplano tangente a S_a que pasa por x_0).

   (b) (multiplicadores de Lagrange) Sean f y S_a como antes y $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^1, entonces si x_0 es un mínimo (o máximo) de g restringida a S_a y si $\nabla f(x_0) \neq 0$, existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $\nabla g(x_0) = \lambda \nabla f(x_0)$.

8. (a) Sea $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ dada por $T(f) = f^2$. Probar que T es diferenciable y que su diferencial está dada por $DT(f)(h) = 2f \cdot h$.

   (b) Sea $T : l^2 \to l^1$ dada por $(Tx)_n = x_n^2$. Probar que T es diferenciable y calcular su diferencial.

9. Probar que $C[0,1]$ es separable.

10. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua tal que

$$\int_0^1 f(x)x^n dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

Probar que entonces $f \equiv 0$ en $[0,1]$.