

PRÁCTICA 0

1. a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Mostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$.
Sugerencia: considerar $[x] + 1$.
 - b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número racional r tal que $x < r < y$.
 - c) Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r > s$. Mostrar que existe un número irracional entre r y s .
 - d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número irracional entre x e y .

2. a) Sea $x \in \mathbb{R}$, probar que existe una sucesión $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que
 - $\triangleright q_n \geq x$ para todo $n \in \mathbb{N}$
 - $\triangleright (q_n)$ estrictamente decreciente y
 - $\triangleright q_n \longrightarrow x$
 - b) Enunciar y probar un enunciado análogo donde (q_n) sea estrictamente creciente.
 - c) Sean $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon > 0$. Mostrar que existe $q = (q_1, \dots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\|x - q\| = \left(\sum_{i=1}^m (x_i - q_i)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$.

3. Sea $A = \left\{ \frac{m}{2^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$.
 Analizar la misma situación para el conjunto $B = \left\{ \frac{m}{b^n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$, donde $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

4. a) Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión monótona que tiene una subsucesión convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Probar que $a_n \longrightarrow \ell$. ¿Qué pasa si la subsucesión tiende a ∞ ?
 - b) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también lo hace la sucesión original.
 - c) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.
 - d) Probar que toda sucesión de Cauchy es acotada.
 - e) Encontrar una sucesión –no convergente– (a_n) que verifique $|a_n - a_{n+1}| \longrightarrow 0$.
 - f) Analizar la situación del inciso anterior pero con la condición: $|a_n - a_{n+p}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y estudiar si la respuesta contradice algún resultado conocido.

5. Mostrar que en un cuerpo totalmente ordenado arquimediano son equivalentes las afirmaciones siguientes:
- a) Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.
 - b) Toda sucesión de Cauchy es convergente.
 - c) Si $(I_n)_{n \geq 1}$ es un encaje de intervalos cerrados cuyas longitudes tienden a cero, entonces existe un único $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.
 - d) Todo conjunto acotado superiormente y no vacío tiene supremo.
 - e) Toda sucesión monótona y acotada tiene límite.
6. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $(x_i)_{i \geq 0}, (y_j)_{j \geq 0}$ desarrollos de ambos en base $b > 1$. Se supone que el desarrollo de y es infinito, i.e., para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i > n$ con $y_i > 0$.
- a) Probar que si $x_i = y_i$ para todo $i \leq n - 1$ y $x_n < y_n$, entonces $x < y$.
Sugerencia: $\sum_{i=0}^n x_i b^{-i} + b^{-n} \leq \sum_{i=0}^n y_i b^{-i}$; además $y - x \leq b^{-n+1}$.
 - b) Deducir que el orden entre x e y es el mismo que el de los primeros términos en que difieren sus desarrollos.
 - c) Manteniendo las hipótesis de a), sea $z \in [x, y]$. Probar que entonces z tiene un desarrollo en base b con $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \leq n - 1$.
7. Hallar el desarrollo en base 3 de los números 2.25 y 10.7.