PRÁCTICA 2

1. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos o cerrados
 $\mathbb{Z}$, $\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Q}$, $[0, 1)$, $\mathbb{R}_{\geq 0}$, $\{x \in \mathbb{R} / x^3 < 2\}$
2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado que contiene a todos los racionales del intervalo $(0, 1)$. Probar que $[0, 1] \subset A$.
3. Mostrar que si se reemplaza la condición de *cerrados* por la de *abiertos* en el teorema de encaje de intervalos, la conclusión deja de ser cierta.
4. a) Probar que toda familia de abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es necesariamente numerable. Dar un ejemplo de una familia de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.
 b) Probar que el conjunto de puntos aislados de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable.

5. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq 5$) por:

$$d_1(x, y) = (x - y)^2 \quad , \quad d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} \quad , \quad d_3(x, y) = |x^2 - y^2|$$

$$d_4(x, y) = |x - 2y| \quad , \quad d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

6. Sean (S_1, d_1) y (S_2, d_2) espacios métricos. Consideremos la aplicación $d : (S_1 \times S_2) \times (S_1 \times S_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. Probar que d define una métrica en $S_1 \times S_2$. Construir otras métricas en $S_1 \times S_2$.

7. a) Si (X, d) es un espacio métrico, se define: $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Probar que d' también es una métrica en X .

Observar que $0 \leq d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

- b) Sea X un conjunto y d_1, d_2 dos métricas en X . Entonces, la función $d_1 + d_2$ es una métrica en X . ¿Y $d_1 - d_2$?
- c) Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que $0 \leq d_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x = (x_n), y = (y_n)$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

d) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X . Mostar que $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico.

8. Probar que (M, d) es un espacio métrico para

a) $M = \mathbb{R}^n$ y $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

b) $M = \mathbb{R}^n$ y $d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$

c) $M = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ es continua}\}$ y $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$

d) Sea $\ell^\infty = \{(a_n) \subset \mathbb{R} / (a_n) \text{ es acotada}\}$. Probar que (ℓ^∞, d) es un espacio métrico para $d((a_n), (b_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$

e) $M = \mathbb{Z}$ y $d(a, b) = N(a - b)$ donde $N : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ está dada por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } p^n \mid a \text{ y } p^{n+1} \nmid a \quad (a \neq 0) \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

y p es un primo fijo.

9. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ) .

NOTA: δ se llama **métrica discreta** y (X, δ) **espacio métrico discreto**.

10. Sea $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por: $d_\infty(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

a) Probar que d_∞ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

b) Caracterizar la bola abierta de centro a y radio r para esta métrica.

c) Si ρ es la métrica euclídea de $\mathbb{R}^n$, mostrar que d_∞ y ρ definen la misma topología, i.e., un conjunto es abierto para d_∞ si y sólo si lo es para ρ .

11. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

a) $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{\substack{V \text{ abierto} \\ V \subset A}} V$ para todo $A \subset X$

b) $\overset{\circ}{A} \subset A$ ¿cuándo vale la igualdad?

$$\text{c) } \overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset \quad \text{y} \quad \overset{\circ}{X} = X$$

$$\text{d) } A \subset B \quad \implies \quad \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$$

$$\text{e) } A \overset{\circ}{\cap} B = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

$$\text{f) } \text{¿Qué se puede decir de } A \overset{\circ}{\cup} B?$$

$$\text{g) } A \overset{\circ}{\times} B = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$$

12. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

$$\text{a) } \overline{A} = \bigcap_{V \substack{\text{cerrado} \\ A \subset V}} V \quad \text{para todo } A \subset X$$

$$\text{b) } A \subset \overline{A} \quad \text{¿cuándo vale la igualdad?}$$

$$\text{c) } \overline{\emptyset} = \emptyset \quad \text{y} \quad \overline{X} = X$$

$$\text{d) } A \subset B \quad \implies \quad \overline{A} \subset \overline{B}$$

$$\text{e) } \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

¿Se puede generalizar a una unión infinita?

$$\text{f) } \text{¿Qué se puede decir de } \overline{A \cap B}?$$

$$\text{g) } x \in \overline{A} \iff \text{ existe } (x_n) \subset A \text{ tal que } x_n \longrightarrow x$$

$$\text{h) } \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

13. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar:

$$\text{a) } X - \overset{\circ}{A} = X - \overline{A}$$

$$\text{b) } \overline{X - A} = X - \overset{\circ}{A}$$

$$\text{c) } \text{¿Son ciertas las igualdades: } \overline{A} = \overline{\overset{\circ}{A}} \quad , \quad \overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{\overline{A}}?$$

14. Sea (X, d) un espacio métrico y A, B subconjuntos de X . Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

$$\text{a) } A' \text{ es cerrado}$$

$$\text{b) } \overline{A} = A \cup A'$$

$$\text{c) } A \subset B \quad \implies \quad A' \subset B'$$

15. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto.

a) $\partial A = \overline{A \cap X} - A$

b) ∂A es cerrado

c) $\partial A = \partial(X - A)$

16. Calcular la clausura (en $\mathbb{R}$) de:

$[0, 1]$; $(0, 1)$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$; $\mathbb{Z}$; $[0, 1) \cup \{2\}$

17. Sea (M, d) un espacio métrico. Dados $a \in M$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in M / d(x, a) \leq r\}$.

a) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{\overline{B}(a, r)} \subset \overline{B}(a, r)$.

b) Dar un ejemplo de una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

c) Probar que en $(\mathbb{R}^n, d)$ —siendo d cualquiera de las métricas del ejercicio 8— vale que $\overline{B(a, r)} = \overline{\overline{B}(a, r)}$ para todo $r > 0$.

18. Pensando a $\mathbb{Z}$ como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$, caracterizar los abiertos y los cerrados. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X .

19. Sea (M, d) un espacio métrico y sean (x_n) , (y_n) sucesiones en M .

a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

b) Si (x_n) , (y_n) son dos sucesiones de Cauchy en M , probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))$ es convergente.

20. Probar que todo subespacio completo de un espacio métrico es cerrado.

21. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subset X$ y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* por $d_A(x) = \inf\{d(x, a) / a \in A\}$. Probar:

a) $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$

b) $x \in A \implies d_A(x) = 0$

c) $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$

d) $B_A(r) = \{x \in X / d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X / d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

f) $B_A(r) = \{x \in X / d_A(x) > r\}$ es abierto para todo $r > 0$

g) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X / d_A(x) \geq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

22. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X .

a) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ

b) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ

c) Probar que todo cerrado es un G_δ

Deducir que todo abierto es un F_σ

d) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$

e) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$.

¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?

23. Si $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$, donde F_k es cerrado en $\mathbb{R}^n$, entonces al menos uno de los F_k tiene interior no vacío.

24. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subset X$ –no vacíos– se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $d(A, B) = d(\bar{A}, B)$

b) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$

c) $d(A, B) = 0 \iff \bar{A} \cap \bar{B} \neq \emptyset$

25. Dado un espacio métrico (M, d) , un subconjunto A de M se dice **denso en M** si $\bar{A} = M$ y decimos que un espacio métrico es **separable** si contiene un subespacio denso y numerable.

Probar que $\mathbb{R}^n$ es separable.

26. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) M es separable

b) Existe una familia numerable $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos de M tal que todo abierto de M es unión de abiertos de $\mathcal{U}$

c) Existe una familia numerable $\mathcal{U} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos de M tal que para todo $x \in M$ y todo entorno V de x en M vale que $x \in U_m \subset V$, para algún $m \in \mathbb{N}$

Concluir que en un espacio métrico separable, de todo cubrimiento por abiertos se puede extraer un subcubrimiento numerable.

Este resultado se conoce como *teorema de Lindelöf*.

Generalizar el ejercicio 4b) a un espacio métrico separable.