Práctica 3

1. Probar –usando la definición– que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ es compacto, donde (a_n) es una sucesión real que converge a 0.

Mostrar que el intervalo $(0, 1]$ no es compacto.

2. Sea (M, d) un espacio métrico y $S \subset T \subset M$. Probar que S es compacto en (M, d) si y sólo si S es compacto en el subespacio métrico (T, d).

3. Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

4. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

5. Sea (X, d) un espacio métrico y $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad de que toda sucesión de Cauchy $(a_n) \subset \mathcal{D}$ converge en X. Probar que X es completo.

6. Lema del cubrimiento de Lebesgue

Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in I}$ de un espacio métrico (M, d), un número $\varepsilon > 0$ se llama ***número de Lebesgue*** de $(U_i)_{i \in I}$ si para todo $x \in M$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_j$.

Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

7. Sea $A = \{a_n \in \ell^\infty \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $a_n = (a_{n_k})$ está definida por

$$a_{n_k} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Probar que A es discreto, cerrado y acotado pero no compacto.

8. Probar que toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de un espacio métrico es compacta.

9. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X tiene la ***propiedad de intersección finita*** (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i \in I}$ tiene intersección no vacía.

a) Probar que un subconjunto $K \subset X$ es compacto si y sólo si toda familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos cerrados de K con la P.I.F. tiene intersección no vacía.

b) Deducir que si X es compacto, entonces todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación en X.

10. Teorema de Cantor

Un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos y tales que $F_{n+1} \subset F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\text{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

11. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que (X, d) es ***secuencialmente compacto*** si toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Si para todo $\varepsilon > 0$ existen finitos puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$, se dice que (X, d) es ***totalmente acotado***.

Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

a) X es compacto

b) Todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación en X

c) X es secuencialmente compacto

d) X es totalmente acotado y completo.

12. Sea (X, d) un espacio métrico.

a) Sean $K \subset X$ un compacto y $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; i.e., la distancia entre x y K 'se realiza'. ¿Es cierto que $d(x, K) > 0$?

b) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; i.e., la distancia entre K_1 y K_2 'se realiza'. ¿Es cierto que $d(K_1, K_2) > 0$?

c) Mostrar que la afirmación del inciso anterior es falsa si K_2 es cerrado pero no compacto.

13. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X \ / \ K \text{ es compacto y no vacío}\}$$

a) Probar que $\tilde{d}(A, B) = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

b) Sea $\delta(A, B) = \text{máx}\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$. Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.
Sugerencia: probar que para todo $\varepsilon > 0$ es

$$\delta(A, B) < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A, \varepsilon)$$

donde $B(C, \varepsilon) = \{K \in \mathcal{K}(X) \ / \ \delta(C, K) < \varepsilon\}$

14. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor. Probar que

a) $\mathcal{C}$ es cerrado y acotado (y por lo tanto compacto).

b) $\overset{\circ}{\mathcal{C}} = \varnothing$

15. Sea $C_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{R} \;/\; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en C_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \;/\; n \in \mathbb{N}\}$$

a) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x,1) = \{y \in C_0 \;/\; d(x,y) \leqslant 1\}$ no es compacta.

b) Probar que (C_0, d) es separable.

16. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 < |x| < 2\}$, $\mathbb{N}$, $[0,1)$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$

$B(a,\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ en un espacio métrico (M,d).

17. Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cup B$ no sea conexo.

Idem para $A \cap B$ y $A - B$.

18. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ conexo y sea x un punto de acumulación de C. Probar que $C \cup \{x\}$ es conexo.

19. Determinar la validez de las siguientes afirmaciones

a) Si C es conexo, entonces $\overset{\circ}{C}$ es conexo.

b) Si C es conexo, entonces $\overline{C}$ es conexo.

20. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

a) No existen U, V abiertos en A, no vacíos y disjuntos tales que $A = U \cup V$

b) No existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X y disjuntos de modo que $A \cap \mathcal{U}$, $A \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$ y $A \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

21. Probar las siguientes equivalencias

a) C es conexo

b) Si $A \subset C$ es no vacío, abierto y cerrado entonces, $A = C$

c) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado –en C– entonces, $A = C$

22. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$

$\operatorname{arcsen}([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$ [1] , $\mathbb{Q}$

$B((-1,0),1) \cup B((1,0),1)$, $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1) \cup \{(0,2)\}$

$B((-1,0),1) \cup B((1,0),1) \cup \{(0,0)\}$

23. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$ y $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0,0),(0,1)\}$. Probar que

a) $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X

b) si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X entonces, $\{(0,0),(0,1)\} \subset B$ o bien $\{(0,0),(0,1)\} \cap B = \varnothing$.

24. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ para todo $i = 0, \dots, n-1$. Probar que $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

25. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados.

26. Un espacio métrico (M,d) se dice ***localmente conexo*** si dados $x \in M$ y U entorno de x, existe V entorno conexo de x contenido en U.

Probar que las componentes conexas de un espacio métrico localmente conexo son abiertas.

27. Probar que los siguientes conjuntos son totalmente disconexos [2]:

a) un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2

b) $\mathbb{Q}$

c) el conjunto de Cantor

28. Porbar que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x \notin \mathbb{Q} \ , \ y \notin \mathbb{Q}\}$ es totalmente disconexo.

---

[1] $\operatorname{arcsen} : [-1,1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es la inversa continua de la función $\operatorname{sen}|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1,1]$

[2] Un espacio métrico (X,d) se dice totalmente disconexo si $\sharp A = 1$ para todo $A \subset X$ conexo.