Práctica 4

1. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$. Probar que son equivalentes:

a) f es continua

b) Para todo $x_0 \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$

c) Para todo $A \subset Y$ abierto, $f^{-1}(A)$ es abierto en X

d) Para $F \subset Y$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X

e) Para toda sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow x \in X$, la sucesión $(f(x_n)) \subset Y$ converge a $f(x)$.

2. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

a) $f : (\mathbb{R}, |\ |) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, $f(x) = x^2 - x + 12$

b) $f : (\mathbb{R}^2, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, donde d representa la métrica euclídea.

c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

d) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

e) $i : (E,d) \longrightarrow (X,d)$, la inclusión, donde $E \subset X$

f) $f : (C([0,1]), d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, $f(\varphi) = \varphi(0)$, donde $C([0,1])$ es el conjunto de las funciones continuas definidas en el intervalo real $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$ y $d(f,g) = \max\{|f(x) - g(x)| \ / \ x \in [0,1]\}$

3. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea, probar que:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -1 \leqslant x^3 - 3y^4 + z - 2 \leqslant 3\}$ es cerrado.

c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \ / \ 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

4. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice ***abierta*** si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subset X$ y se dice ***cerrada*** si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subset X$.

a) Probar que si f es biyectiva entonces, f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

b) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea abierta.

c) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea cerrada.

d) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

5. Dos métricas d_1 y d_2 en un espacio X, se dicen ***topológicamente equivalentes*** si todo abierto de (X, d_1) es abierto en (X, d_2) y recíprocamente.

a) Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $d_1(x, y) \leqslant c_1\, d_2(x, y) \leqslant c_2\, d_1(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

b) Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad $id_X : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ es homeomorfismo.

c) Probar que las métricas euclídea y del supremo son topológicamente equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

d) Mostrar otra métrica en $\mathbb{R}^n$ que sea topológicamente equivalente a las anteriores.

e) Mostrar una métrica en $\mathbb{R}^n$ que no sea topológicamente equivalente a las anteriores.

6. Sean $f, g, h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = x.f(x) \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n} \;, \quad (m:n)^1 = 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Probar que:

a) f es discontinua en todo punto

b) g sólo es continua en $x = 0$

c) h es continua en $[0, 1] - \mathbb{Q}$

7. a) Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas y $D \subset X$ denso. Probar que si $f|_D = g|_D$ entonces, $f = g$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

8. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞; i.e., $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sup\{d(x_1, y_1), d'(x_2, y_2)\}$.

[1] $(m:n)$ indica el máximo común divisor entre m y n

a) Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son continuas y abiertas.

Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.

b) Sea (Z, δ) un espacio métrico y $f : Z \longrightarrow X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

9. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación.

a) Probar que si f es continua y $E \subset X$ entonces, $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

Mostrar con un ejemplo que puede no valer la igualdad.

b) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

10. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice un ***homeomorfismo*** si

- ◇ f es biyectiva
- ◇ f es continua
- ◇ f^{-1} es continua

Probar que si (X, d) es compacto toda función $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ biyectiva y continua es abierta; i.e., es un homeomorfismo.

11. **a)** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Probar que es continua pero no abierta.

b) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Probar que es continua pero no cerrada.

12. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y abierta.

a) Probar que f no tiene extremos locales; i.e., no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leqslant f(x)$ (resp. $f(x_0) \geqslant f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

b) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

c) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

13. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

14. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$.

a) Probar que f es continua. ¿Sigue valiendo si f toma valores irracionales?

b) Suponiendo que f es biyectiva, ¿puede ser un homeomorfismo?

15. Probar que un espacio métrico (X, d) es conexo si y sólo si toda función continua de X en $\{0, 1\}$ es constante.

16. **a)** Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

b) Mostrar que no todo conjunto conexo es arcoconexo.

Sugerencia: considerar el conjunto $A = \overline{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < x \leqslant 1 \ , \ y = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\}}$

17. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = f(x, y)\}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

b) $B(0, 1)$, $\mathbb{R}^n - B(0, 1)$

c) $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

d) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

18. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define la siguiente relación:

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad \text{existe } c : [0, 1] \longrightarrow X \text{ continua y tal que } c(0) = a \ , \ c(1) = b$$

a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia en X.

b) Sea $C_a = \{x \in X \ / \ a \sim x\}$. Verificar que

◇ si $a \sim b$ entonces $C_a = C_b$

◇ si $a \not\sim b$ entonces $C_a \cap C_b = \varnothing$

◇ $X = \bigcup\limits_{a \in A} C_a$

NOTA: C_a se llama ***componente arcoconexa*** de X

c) Mostrar que X es arcoconexo si y sólo si tiene una única componente arcoconexa.

19. Un espacio métrico (X, d) se dice ***localmente conexo*** (resp. ***localmente arcoconexo***) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

a) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto entonces, A es conexo $\Longleftrightarrow$ A es arcoconexo

b) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

c) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo abierto y conexo es arcoconexo.

d) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas y cerradas.

e) Un espacio métrico es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de los abiertos son abiertas.

20. Sea (X, d) un espacio métrico arcoconexo, (Y, d') un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

21. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant c\, d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geqslant 0$. Probar que f es uniformemente continua.

22. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subset X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación. Se supone que existen $\alpha > 0$, $(x_n), (y_n) \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

- $\star$ $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$
- $\star$ $d'(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \alpha$ para todo $n \geqslant n_0$

Probar que f no es uniformemente continua en A.

Deducir que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Lo es en $\mathbb{R}_{\leqslant -\pi}$? ¿Y en $(-4, 10]$?

23. **a)** Sea $f : \mathbb{R}_{\geqslant a} \longrightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geqslant a}$.

b) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

c) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

24. **a)** Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ uniformemente continua y sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))$ es una sucesión de Cauchy en Y.

b) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme [2]. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformenente equivalente [3].

25. **a)** Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformenente continua.

b) Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no acotada y uniformenente continua.

26. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ una aplicación. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

[2] i.e., f y f^{-1} son uniformemente continuas

[3] Dos métricas d_1 y d_2 se dicen uniformenente equivalentes si cumplen la condición del ejercicio 5a)

a) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ continua para todo $i = 1, \ldots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

b) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para todo $i = 1, \ldots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

c) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ y $f|_{X_i}$ continua para todo $i = 1, \ldots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

27. Teorema de Urysohn

Sea (X, d) un espacio métrico y A, B cerrados disjuntos de X. Entonces, existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

a) $f|_A \equiv 0$

b) $f|_B \equiv 1$

c) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in X$

Sugerencia: considerar $\dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$

Deducir que existen abiertos U, V disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

28. Mostrar que si $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ es continua entonces, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

29. **a)** Sea (X, d) un espacio métrico conexo y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leqslant b$. Probar que para todo $c \in [a, b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$.

¿Vale la recíproca?

b) Deducir del inciso anterior que si (X, d) es conexo, entonces $\sharp(X) = 1$ o $\sharp(X) \geqslant c$.

30. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Probar que la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ es uniformemente continua.

31. Mostrar que la imagen de un conjunto totalmente acotado por una función uniformemente continua es totalmente acotada.

32. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$ compacto. Probar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$ entonces, existe $K > 0$ tal que $f(x) \geqslant K$ para todo $x \in A$.

33. Demostrar que si $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ es uniformemente continua en X y $A, B \subset X$ son no vacíos y tales que $d(A, B) = 0$ entonces, $d'(f(A), f(B)) = 0$.