

## PRÁCTICA 5

1. Hacer una lista de los espacios métricos vistos hasta ahora. ¿Cuáles son normados? ¿Cuáles son de Banach?
2. Sean  $(E, \|\cdot\|_E)$  y  $(F, \|\cdot\|_F)$  espacios normados y considere el espacio vectorial producto  $E \times F$  con la estructura vectorial natural y las normas

$$\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F$$

y

$$\|(x, y)\|' = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$

Probar que estas normas son equivalentes. ¿Se le ocurre alguna otra norma equivalente a las anteriores?

3. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado. Probar que se verifican:
  - a)  $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$  (la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
  - b)  $\text{diam}(B_r(x)) = 2r$ .
4. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y sea  $C \subset E$ . Decimos que  $C$  es *convexo* si  $\forall x, y \in C$  y  $\forall t \in [0, 1]$  se tiene que  $tx + (1-t)y \in C$ .
  - a) Probar que  $B_r(x)$  es convexo.
  - b) Probar que si  $(C_i)_{i \in I}$  son convexos, entonces  $\bigcap_{i \in I} C_i$  lo es.
  - c) Probar que si  $C$  es convexo, entonces  $C^\circ$  lo es.
  - d) Probar que si  $C$  es convexo, entonces  $\overline{C}$  lo es.
5. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $S \subset E$  un subespacio (vectorial). Probar que:
  - a)  $\overline{S}$  también es un subespacio.
  - b) Si  $S \neq E$ , entonces  $S^\circ = \emptyset$ .
6. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio de Banach y  $(x_n) \subset E$ . Si  $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$  converge, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  converge.

7. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados y si son hiperplanos.

- a)  $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subset l^\infty$ .
- b)  $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subset c$
- c)  $\{x \in l^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset l^1$

8. Sean  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  espacios normados. Consideramos

$$L(E, F) = \{T : E \rightarrow F / T \text{ es lineal y continua}\},$$

y para cada  $T \in L(E, F)$  sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F$$

Probar que:

- a)  $(L(E, F), \|\cdot\|)$  es un espacio normado.
  - b) Si  $F$  es de Banach entonces  $L(E, F)$  también lo es.
9. Sean  $E$  y  $F$  espacios normados y sea  $T : E \rightarrow F$  un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M / \|Tx\| \leq M\|x\|\} \end{aligned}$$

10. Sea  $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y sea  $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy$$

Probar que  $Kf \in C[0, 1]$  y que  $K$  es lineal y continua. Acotar su norma.

11. En  $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \geq 1} / \exists n_0, a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$  ponemos la norma infinito. Probar que la función  $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f((a_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n$$

es lineal pero no continua.

12. a) Sea  $\phi \in C[0, 1]$  y sea  $T_\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx$$

Probar que  $T_\phi$  es un funcional lineal continuo y que  $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$

- b) Sea  $T : c \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .  
 Probar que  $T$  es lineal, continuo y hallar  $\|T\|$ .
- c) Sea  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$  el conjugado de  $p$  y sea  $b \in l^{p'}$ . Definimos  $T_b : l^p \rightarrow \mathbb{R}$  como sigue

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$$

Probar que  $T_b$  es lineal, continuo y hallar  $\|T_b\|$  (Ayuda: utilice la desigualdad de Hölder).

13. Sea  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espacio normado de dimensión finita.

- a) Dada una base  $B = \{v_1, \dots, v_m\}$  de  $E$  consideremos la transformación lineal  $T : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  dada por

$$T \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \right) = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$$

- 1) Probar que  $\|\cdot\|_T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\|x\|_T = \|T^{-1}(x)\|_E$$

es una norma en  $\mathbb{R}^m$ .

- 2) Deducir que  $T$  es un homeomorfismo.

- b) Probar que toda forma lineal  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.  
 c) Probar que  $(E, \|\cdot\|_E)$  es un espacio de Banach.

14. Sea  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espacio normado y  $S \subset E$  un subespacio vectorial de dimensión finita. Probar que  $S$  es cerrado.

15. Mostrar que en  $l^2$  las normas  $\|\cdot\|_2$  y  $\|\cdot\|_{\infty}$  no son equivalentes.

16. Sea  $C^1[0, 1]$  el espacio vectorial de las funciones  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  en  $[0, 1]$  (esto es continuas en  $[0, 1]$  y con derivada  $f'$  continua en  $[0, 1]$ ).

- a) Consideremos la aplicación lineal  $D : (C^1[0, 1], \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$  dada por  $D(f) = f'$ . Mostrar que no es continua.  
 b) En cambio si en  $C^1[0, 1]$  consideramos la norma:

$$\|f\|_{C^1} = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$$

$D : (C^1[0, 1], \|\cdot\|_{C^1}) \rightarrow (C[0, 1], \|\cdot\|_{\infty})$  sí resulta continua.

- c) Probar que  $C^1[0, 1]$  no es completo con la norma  $\|\cdot\|_{\infty}$  pero sí lo es con  $\|\cdot\|_{C^1}$ .