

## PRÁCTICA 7

1. **a)** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable. Probar que  $f$  es creciente en  $(a, b)$  si y sólo si  $f' \geq 0$  en  $(a, b)$ .
- b)** Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable. Probar que si  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f$  es estrictamente creciente en  $(a, b)$ . Mostrar con un ejemplo que no vale la recíproca.
2. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable y tal que  $f'$  es acotada. Probar que  $f$  es uniformemente continua en  $\mathbb{R}$ .
3. Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $(a, b)$ , derivable en  $(a, b) - \{x_0\}$  y tal que los límites laterales de  $f'$  en  $x_0$  existen y son finitos.
  - i) Probar que  $f$  es derivable lateralmente en  $x_0$ . Deducir que si ambos límites laterales coinciden, entonces  $f$  es derivable en  $x_0$  y calcular  $f'(x_0)$ .
  - ii) Mostrar que los resultados de i) pierden validez si se omite hipótesis de continuidad de  $f$  en  $x_0$ .
4. Sean  $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $(\alpha, \beta)$  y  $\alpha < a < b < \beta$  tal que  $f'(a) \neq f'(b)$ .
  - (a) Probar que si  $f'(a) < 0 < f'(b)$  entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .
  - (b) Probar que si  $\lambda$  es un número real comprendido entre  $f'(a)$  y  $f'(b)$ , existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = \lambda$ .
  - (c) Sea  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(t) = \begin{cases} (t^2 \sin(1/t), t^2 \cos(1/t)) & \text{si } 0 < t < 1 \\ (0, 0) & \text{si } -1 < t \leq 0 \end{cases}$$

Probar que para todo  $t \in (-1, 1)$  existe  $f' = (f'_1, f'_2)$  pero  $f'((-1, 1))$  no es conexo.

5. Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que  $f$  es **convexa** si para todo  $x, y \in (a, b)$  y todo  $t \in (0, 1)$  es

$$f(tx + (1-t)y) \leq t.f(x) + (1-t).f(y)$$

Si  $f$  es derivable, demostrar que  $f$  es convexa si y sólo si  $f'$  es monótona creciente.

Comprobar que si además existe  $f''$  entonces,  $f$  es convexa si y sólo si  $f''(x) \geq 0$  para todo  $x \in (a, b)$ .

6. Sea  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  derivable en  $x = 0$ . Dadas dos sucesiones  $(\alpha_n), (\beta_n) \subset (-1, 1)$  que convergen a 0 y tales que  $\alpha_n < \beta_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  se define

$$D_n = \frac{f(\alpha_n) - f(\beta_n)}{\alpha_n - \beta_n}$$

Demostrar que

- a) si  $\alpha_n < 0 < \beta_n$  para todo  $n$ , entonces  $D_n \rightarrow f'(0)$
- b) si  $0 < \alpha_n$  para todo  $n$  y  $\left(\frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n}\right)$  está acotada, entonces  $D_n \rightarrow f'(0)$
- c) si  $f$  es de clase  $C^2$  en  $(-1, 1)$ , entonces  $D_n \rightarrow f'(0)$ .

para

7. Sean  $E \subset \mathbb{R}^n$  un bola abierta y  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  una aplicación que satisface

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2$$

para todo  $x, y \in E$ . Demostrar que  $f$  es constante. ¿Vale este resultado si  $E$  es cualquier abierto de  $\mathbb{R}^n$ ?

8. Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable.

- a) Probar que si  $f$  alcanza un extremo en  $x_0 \in U$ , entonces  $Df(x_0) \equiv 0$ .
- b) Mostrar que si  $\bar{U}$  es compacto y  $f$  es continua en  $\bar{U}$  y  $f$  es constante en  $\partial U$ , entonces existe  $x_0 \in U$  tal que  $Df(x_0) \equiv 0$ .

9. Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$ .

- (a) Probar que si existen y son continuas las derivadas parciales de cada  $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f$  es diferenciable.
- (b) Si  $f$  es diferenciable consideremos la función  $D$  que a cada  $x \in U$  le asigna la transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$   $D(f)(x)$ .

Probar que  $D : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  (este último con la norma de operadores) es continua si, y sólo si, son continuas las derivadas parciales de cada  $f_i$ .

10. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x + \frac{1}{2(1+x^2)}$ . Probar que  $f$  es un difeomorfismo local alrededor de cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Encontrar un intervalo alrededor de  $x_0 = 0$  en el cual  $f$  sea difeomorfismo.

11. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(t) = \begin{cases} t + 2t^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\right) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

Mostrar que  $f'(0) = 1$  y  $f'$  es acotada en  $(-1, 1)$ , pero que sin embargo  $f$  no es biyectiva en ningún entorno de  $t = 0$ .

Deducir que la continuidad de  $f'$  en el punto es necesaria en el teorema de la función inversa, incluso en el caso  $n = 1$ .

12. Sea  $U$  un abierto de  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^1$  con jacobiano no nulo en todo  $x \in U$ .

- i) Probar que  $f$  es abierta.

- ii) Probar que para cada  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $f^{-1}(y)$  es un conjunto discreto.
13. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y, z) = x^2y + e^x + z$ .
- i) Comprobar que  $f(0, 1, -1) = 0$  y  $D_1f(0, 1, -1) \neq 0$ .
- ii) Deducir la existencia de un entorno  $U \subset \mathbb{R}^2$  de  $(1, -1)$  y una función  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable tal que  $f(g(y, z), y, z) = 0$  para todo  $(y, z) \in U$ .
- iii) Hallar la ecuación del plano tangente al gráfico de  $g$  en el punto  $(1, -1, g(1, -1))$ .
14. Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $(1, 2, 0)$  es solución de la ecuación

$$F(xz, y - 2x) = 0.$$

- i) Hallar condiciones suficientes para que existan un entorno  $W \subset \mathbb{R}^2$  del punto  $(1, 0)$  y una función  $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tales que  $\varphi(1, 0) = 2$  y  $F(xz, \varphi(x, z) - 2x) = 0$  para todo  $(x, z) \in W$ .
- ii) Probar que  $x \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, z) - z \frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, z) = 2x$  para todo  $(x, z) \in W$ .
15. a) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivable y tal que  $f'(x) \neq 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Probar que  $f$  tiene a lo sumo un punto fijo.
- b) Mostrar que si bien la función  $f(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$  satisface  $0 < f'(x) < 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , no tiene ningún punto fijo.
- c) Explicar por qué esto no contradice el teorema del punto fijo.

16. Verificar que la función  $f(x) = \frac{x^3 + 1}{3}$  tiene tres puntos fijos  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  que satisfacen

$$-2 < \alpha < -1 \quad , \quad -1 < \beta < 1 \quad , \quad 1 < \gamma < 2$$

Si se escoge arbitrariamente  $x_1 \in \mathbb{R}$  y se define la sucesión  $x_{n+1} = f(x_n)$ , probar que

- a) si  $x_1 < \alpha$ , entonces  $x_n \rightarrow -\infty$
- b) si  $\alpha < x_1 < \gamma$ , entonces  $x_n \rightarrow \beta$
- c) si  $\gamma < x_1$ , entonces  $x_n \rightarrow +\infty$

Concluir que por este método sólo puede localizarse  $\beta$ .

17. Dado  $\alpha > 0$ , se elige  $x_1 > \sqrt{\alpha}$  y se define recursivamente la sucesión  $(x_n)$  por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right)$$

- a) Demostrar que  $(x_n)$  es decreciente y que converge a  $\sqrt{\alpha}$ .
- b) Sea  $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$ . Mostrar que

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n^2}{2x_n} < \frac{\varepsilon_n^2}{2\sqrt{\alpha}}$$

c) Deducir que

$$\varepsilon_{n+1} < \beta \left( \frac{\varepsilon_1}{\beta} \right)^{2^n}$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$  y donde  $\beta = 2\sqrt{\alpha}$ .

d) Si  $\alpha = 3$  y  $x_1 = 2$ , mostrar que  $\frac{\varepsilon_1}{\beta} < \frac{1}{10}$  y que por lo tanto

$$\varepsilon_5 < 4 \cdot 10^{-16} \quad \text{y} \quad \varepsilon_6 < 4 \cdot 10^{-32}$$

Esto muestra que este algoritmo tiene una forma sencilla de recurrencia y converge muy rápidamente.

18. Sea  $f$  una función dos veces derivable en el intervalo real  $[a, b]$  tal que

$$\triangleright f(a) < 0 < f(b)$$

$$\triangleright f' \geq \delta > 0 \text{ y } 0 \leq f'' \leq M \text{ para todo } x \in [a, b]$$

Sea  $\xi$  el único punto de  $(a, b)$  en el cual  $f(\xi) = 0$ .

Completar el siguiente esbozo del **método de Newton** para calcular  $\xi$ .

(1) Escoger  $x_1 \in (\xi, b)$  y definir la sucesión  $(x_n)$  por medio de

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Interpretar esto geoméricamente en términos de la tangente al gráfico de  $f$ .

(2) Demostrar que  $x_{n+1} < x_n$  y que  $x_n \rightarrow \xi$

(3) Usar el Teorema de Taylor para mostrar que

$$x_{n+1} - \xi = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n - \xi)^2$$

para algún  $t_n \in (\xi, x_n)$ .

(4) Deducir que

$$0 \leq x_{n+1} - \xi \leq \frac{2\delta}{M} \left[ \frac{2\delta}{M}(x_1 - \xi) \right]^{2^n}$$

Comparar con el ejercicio anterior.

(5) Mostrar que el método de Newton es significativo para encontrar un punto fijo de la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

¿Cómo se comporta  $g'(x)$  cuando  $x$  está muy cerca de  $\xi$ ?

(6) Aplicar el método de Newton a la función  $f(x) = x^{1/3}$  sobre  $\mathbb{R}$ . ¿Qué ocurre?

19. Comprobar que las funciones  $f \equiv 0$  y  $g(x) = \frac{x^2}{4}$  son solución del problema con valores iniciales

$$y' = y^{1/2} \quad , \quad y(0) = 0$$

¿Hay otras soluciones? Determinarlas.

Explicar por qué esto no contradice el teorema de existencia y unicidad de solución.

20. Formular y demostrar un teorema de unicidad análogo para sistemas de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{cases} y'_j = \phi_j(x, y_1, \dots, y_m) \\ y_j(a) = c_j \end{cases} \quad j = 1, \dots, m$$

que también puede escribirse en la forma

$$\begin{cases} Y' = \Phi(x, Y) \\ Y(a) = C \end{cases}$$

donde  $Y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\Phi : [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  y  $C \in \mathbb{R}^m$ .

Generalizar al caso en que  $x \in \mathbb{R}^n$ .

21. Particularizar el ejercicio anterior considerando el sistema

$$\begin{cases} y'_j = y_{j+1} \\ y'_k = f(x) - \sum_{j=1}^m g_j(x)y_j \end{cases} \quad j = 1, \dots, m-1$$

donde  $f, g_1, \dots, g_m$  son funciones reales continuas en  $[a, b]$  y deducir un teorema de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación

$$y^{(m)} + g_m(x)y^{m-1} + \dots + g_2(x)y' + g_1(x)y = f(x)$$

con las condiciones iniciales

$$y(a) = c_1 \quad , \quad y'(a) = c_2 \quad , \quad \dots \quad , \quad y^{m-1}(a) = c_m$$

22. Dados  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , verificar que  $F(t) = e^{At}.X_0$  es la única solución de  $X' = A.X$  que toma el valor  $X_0$  en  $t = 0$ .