Práctica 0

1. a) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $y - x > 1$. Mostrar que existe un entero k tal que $x < k < y$. *Sugerencia*: considerar $[x] + 1$.

b) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número racional r tal que $x < r < y$.

c) Sean $r, s \in \mathbb{Q}$ tales que $r > s$. Mostrar que existe un número irracional entre r y s.

d) Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$. Mostrar que existe un número irracional entre x e y.

2. a) Sea $x \in \mathbb{R}$, probar que existe una sucesión $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ tal que

- ➢ $q_n \geqslant x$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- ➢ (q_n) estrictamente decreciente y
- ➢ $q_n \longrightarrow x$

b) Enunciar y probar un enunciado análogo donde (q_n) sea estrictamente creciente.

c) Sean $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\varepsilon > 0$. Mostrar que existe $q = (q_1, \ldots, q_m) \in \mathbb{Q}^m$ tal que $\|x - q\| = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m} (x_i - q_i)^2 \right)^{1/2} < \varepsilon$.

3. Sea $A = \left\{ \dfrac{m}{2^n} \Big/ m \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$. Probar que A es denso en $\mathbb{R}$.

Analizar la misma situación para el conjunto $B = \left\{ \dfrac{m}{b^n} \Big/ m \in \mathbb{Z}\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\}$, donde $b \in \mathbb{R}_{>0}$.

4. a) Sea $(a_n)_{n \geqslant 1}$ una sucesión monótona que tiene una subsucesión convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Probar que $a_n \longrightarrow \ell$. ¿Qué pasa si la subsucesión tiende a ∞?

b) Demostrar que si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge, entonces también lo hace la sucesión original.

c) Demostrar que cualquier subsucesión de una sucesión convergente es también convergente.

d) Probar que toda sucesión de Cauchy es acotada.

e) Encontrar una sucesión –no convergente– (a_n) que verifique $|a_n - a_{n+1}| \longrightarrow 0$.

f) Analizar la situación del inciso anterior pero con la condición: $|a_n - a_{n+p}| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y estudiar si la respuesta contradice algún resultado conocido.

5. Mostrar que en un cuerpo totalmente ordenado arquimediano son equivalentes las afirmaciones siguientes:

a) Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.

b) Toda sucesión de Cauchy es convergente.

c) Si $(I_n)_{n\geqslant 1}$ es un encaje de intervalos cerrados cuyas longitudes tienden a cero, entonces existe un único $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$.

d) Todo conjunto acotado superiormente y no vacío tiene supremo.

e) Toda sucesión monótona y acotada tiene límite.

6. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y $(x_i)_{i\geqslant 0}, (y_j)_{j\geqslant 0}$ desarrollos de ambos en base $b > 1$. Se supone que el desarrollo de y es infinito, i.e., para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $i > n$ con $y_i > 0$.

a) Probar que si $x_i = y_i$ para todo $i \leqslant n-1$ y $x_n < y_n$, entonces $x < y$.
Sugerencia: $\sum_{i=0}^{n} x_i b^{-i} + b^{-n} \leqslant \sum_{i=0}^{n} y_i b^{-i}$; además $y - x \leqslant b^{-n+1}$.

b) Deducir que el orden entre x e y es el mismo que el de los primeros términos en que difieren sus desarrollos.

c) Manteniendo las hipótesis de **a)**, sea $z \in [x, y]$. Probar que entonces z tiene un desarrollo en base b con $z_i = x_i = y_i$ para todo $i \leqslant n-1$.

7. Hallar el desarrollo en base 3 de los números 2.25 y 10.7.