Práctica 1

1. Demostrar las siguientes igualdades de conjuntos

a) $B - \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (B - A_i)$

b) $B - \bigcap_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} (B - A_i)$

c) $\bigcup_{i \in I} (A_i \cap B) = B \cap \Big(\bigcup_{i \in I} A_i \Big)$

2. Sea $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Hallar una colección $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que verifique

a) $B_k \cap B_j = \varnothing$ si $k \neq j$

b) $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

3. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función y sean A y B subconjuntos de X. Demostrar que

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Generalizar al caso de uniones e intersecciones infinitas.

c) Hallar un ejemplo donde la inclusión de **b)** sea estricta.

4. Sean $f : X \longrightarrow Y$, $A \subset X$ y $B, B_1, B_2 \subset Y$. Demostrar que

a) $A \subset f^{-1}(f(A))$

b) $f(f^{-1}(B)) \subset B$

c) $f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$

d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

e) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$ [1]

f) Generalizar **d)** y **e)** al caso de uniones e intersecciones infinitas.

5. Sea $f : X \longrightarrow Y$. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subset Y$ si y sólo si f es suryectiva.

[1] cf. inciso b) del ejercicio 1

6. Sea $f : X \longrightarrow Y$. Probar que las siguientes propiedades son equivalentes

a) f es inyectiva

b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subset X$

c) $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subset X$

d) $f(A) \cap f(B) = \varnothing$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \varnothing$

e) $f(A - B) = f(A) - f(B)$ para todo $B \subset A \subset X$

7. Para cada subconjunto S de un conjunto A dado se define $\chi_S : A \longrightarrow \{0,1\}$ –***función caraterística*** de S– por $\chi_S(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & a \notin S \end{cases}$. Probar:

a) $\chi_{S \cap T} = \chi_S \cdot \chi_T$ para todo $S, T \subset A$

b) $\chi_{A-S} = 1 - \chi_S$ para todo $S \subset A$

c) $\chi_S + \chi_T = \chi_{S \cup T} + \chi_{S \cap T}$ para todo $S, T \subset A$

8. Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Para cada $a \in A$ se define el conjunto $S_a = \{b \in A \;/\; a \sim b\}$. Probar que

a) para todo $a_1, a_2 \in A$ es: $S_{a_1} = S_{a_2}$ o $S_{a_1} \cap S_{a_2} = \varnothing$

b) $A = \bigcup\limits_{a \in A} S_a$

9. Demostrar que si A es un conjunto de n elementos, entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

10. Probar que los siguientes conjuntos son numerables [2]

$\mathbb{Z}$; $\mathbb{Z}_{\geqslant -3}$; $\mathbb{Z}_{\leqslant -1}$; $3.\mathbb{N}$; $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$; $\mathbb{Q}^2$; $\mathbb{N}^3$; $\mathbb{N}^m$ $(m \in \mathbb{N})$

11. Sea A un conjunto con $\sharp A = \aleph_0$. Probar que

$$\sharp(A^n) = \sharp(A \times \overset{n}{\ldots} \times A) = \sharp(A) = \aleph_0$$

12. a) Sean A y B a lo sumo numerables [3]. Probar que $A \cup B$ es a lo sumo numerable.

b) Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos a lo sumo numerables. Probar que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es a lo sumo numerable.

[2] i.e., tienen cardinal $\aleph_0$

[3] X se dice a lo sumo numerable si es finito o su cardinal es $\aleph_0$

13. Probar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales es numerable.

14. Se dice que un número complejo z es ***algebraico*** si existen enteros $a_0, \dots, a_n$ —no todos nulos— tales que

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

a) Demostrar que el conjunto de todos los números algebraicos es numerable.

b) Deducir que existen números reales que no son algebraicos.

NOTA: estos números se llaman ***trascendentes***.

15. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función monótona. Probar que

$$\sharp\big(\{x \in \mathbb{R} \;/\; f \text{ no es continua en } x\}\big) \leqslant \aleph_0$$

16. ¿Es numerable el conjunto $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$?

17. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos de sucesiones

a) $\{(a_n) \;/\; a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

b) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \;/\; a_n \leqslant a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

c) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \;/\; a_n \geqslant a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

d) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \;/\; \lim\limits_{n \to \infty} q_n = 0\}$

e) $\{(q_n) \subset \mathbb{Q} \;/\; (q_n) \text{ es periódica}\}$ [4]

f) $\{(a_n) \subset \mathbb{N} \;/\; 1 \leqslant a_n \leqslant m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} \qquad (m \in \mathbb{N})$

18. Sean a, b, c cardinales. Probar:

a) $a.(b + c) = a.b + a.c$

b) $a^{b+c} = a^b.\, a^c$

c) $(a^b)^c = a^{bc}$

d) $(ab)^c = a^c.\, b^c$

e) si $b \leqslant c$, entonces $a^b \leqslant a^c \quad \text{y} \quad b^a \leqslant c^a$

[4] i.e., existen $m, k \in \mathbb{N}$ tales que $q_n = q_{n+k}$ para todo $n \geqslant m$.

19. Probar que

$$n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = c^{\aleph_0} = c$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$.

20. Siendo

$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f \ / \ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ $\qquad$ $\mathcal{F}(\mathbb{Q}) = \{f \ / \ f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}\}$

$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \ / \ f \text{ es continua}\}$ $\qquad$ $\mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) \ / \ f \text{ es continua}\}$

a) Probar que $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{R})) > c$.

b) Calcular $\sharp(\mathcal{F}(\mathbb{Q}))$.

c) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{Q}))$.

d) Probar que la función $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ dada por $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$ es inyectiva.

e) Calcular $\sharp(\mathcal{C}(\mathbb{R}))$.

21. Dado $x \in [0,1]$, notamos con $n(x)$ =cantidad de '3' en el desarrollo decimal –sin colas de 9– de x. Se define la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n(x) = +\infty \\ \dfrac{1}{n(x)} & \text{si } n(x) \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) ¿Es numerable el conjunto $A = \{x \in [0,1] \ / \ f(x) = 0\}$?

b) ¿Es cerrado el conjunto $B = \{x \in [0,1] \ / \ f(x) = 1\}$?

c) ¿Es abierto el conjunto $C = \{x \in [0,1] \ / \ f(x) \neq 0\}$?

22. Hallar el cardinal de los siguientes conjuntos

a) $\{I \ / \ I$ es un intervalo de extremos racionales$\}$

b) $\{[a,b] \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$

c) I , sabiendo que $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$ es una familia de intervalos disjuntos

d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 3x + 2y \geqslant 7\}$

e) $\mathbb{R} - \{0\}$

f) $\mathbb{R} - \{e, \pi\}$

23. Sea $\mathcal{A}$ un conjunto finito y $\mathcal{S} = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m$. Probar que $\sharp(\mathcal{S}) = \aleph_0$.

Deducir que, cualquiera sea el alfabeto utilizado, hay más números reales que palabras para nombrarlos.