Práctica 2

1. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ son abiertos o cerrados

$\mathbb{Z}$, $\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1)$, $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$, $\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^3 < 2\}$

2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado que contiene a todos los racionales del intervalo $(0,1)$. Probar que $[0,1] \subset A$.

3. Mostrar que si se reemplaza la condición de *cerrados* por la de *abiertos* en el teorema de encaje de intervalos, la conclusión deja de ser cierta.

4. **a)** Probar que toda familia de abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es necesariamente numerable. Dar un ejemplo de una familia de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

b) Probar que el conjunto de puntos aislados de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable.

5. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant 5)$ por:

$d_1(x,y) = (x-y)^2$, $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$, $d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$

$d_4(x,y) = |x - 2y|$, $d_5(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

6. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_1(x_1,y_1) + d_2(x_2,y_2)$. Probar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$. Construir otras métricas en $X_1 \times X_2$.

7. **a)** Si (X,d) es un espacio métrico, se define: $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d' también es una métrica en X.
Observar que $0 \leqslant d'(x,y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

b) Sea X un conjunto y d_1, d_2 dos métricas en X. Entonces, la función $d_1 + d_2$ es una métrica en X. ¿Y $d_1 - d_2$?

c) Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que $0 \leqslant d_n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x = (x_n)$, $y = (y_n)$ definimos:

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n,y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} X_n$.

d) Sea (X,d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostar que $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio métrico.

8. Probar que (X, d) es un espacio métrico para

a) $X = \mathbb{R}^n \quad$ y $\quad d(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$

b) $X = \mathbb{R}^n \quad$ y $\quad d_2(x,y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$

c) $X = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es continua}\} \quad$ y $\quad d(f,g) = \displaystyle\int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx$

d) $X = \ell^\infty = \{(a_n) \subset \mathbb{R} \ / \ (a_n) \text{ es acotada}\} \quad$ y $\quad d((a_n),(b_n)) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$

e) $X = \mathbb{Z} \quad$ y $\quad d(a,b) = N(a-b)$ donde $N : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ está dada por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si} \quad p^n \mid a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \nmid a \quad (a \neq 0) \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

y p es un primo fijo.

9. Sea X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).

NOTA: δ se llama ***métrica discreta*** y (X, δ) ***espacio métrico discreto***.

10. Sea $d_\infty : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por: $d_\infty(x,y) = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$.

a) Probar que d_∞ es una métrica en $\mathbb{R}^n$.

b) Caracterizar la bola abierta de centro a y radio r para esta métrica.

c) Sean d y d_2 las métricas de $\mathbb{R}^n$ definidas en el ejercicio 8. a). Mostrar que d_∞, d y d_2 definen las mismas topologías, i.e., un conjunto es abierto para d_∞ si y sólo si lo es para d si y sólo si lo es para d_2.

11. Sean (X, d) un espacio métrico y $A, B \subset X$ subconjuntos de X. Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

a) $A^\circ = \displaystyle\bigcup_{\substack{U \text{abierto} \\ U \subset A}} U.$

b) $A^\circ \subset A \qquad$ ¿cuándo vale la igualdad?

c) $\emptyset^\circ = \emptyset \qquad$ y $\qquad X^\circ = X$

d) $A \subset B \qquad \Longrightarrow \qquad A^\circ \subset B^\circ$

e) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$

¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

f) ¿Qué se puede decir de $(A \cup B)^\circ$?

12. Sean (X,d) un espacio métrico y $A,B \subset X$ subconjuntos de X. Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

a) $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{F \text{cerrado} \\ A \subset F}} F.$

b) $A \subset \overline{A}$ ¿cuándo vale la igualdad?

c) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$

d) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$

e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

¿Se puede generalizar a una unión infinita?

f) ¿Qué se puede decir de $\overline{A \cap B}$?

g) $x \in \overline{A} \iff$ existe $(x_n) \subset A$ tal que $x_n \longrightarrow x$

13. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos. Consideremos el espacio métrico $(X_1 \times X_2, d)$ donde d es la métrica definida en el ejercicio 6. Sean $A \subset X_1$, $B \subset X_2$. Probar

(a) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

(b) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

14. Sea (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar:

a) $(X - A)^\circ = X - \overline{A}$

b) $\overline{X - A} = X - A^\circ$

c) ¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{(A^\circ)}$, $A^\circ = \left(\overline{A}\right)^\circ$?

15. Sean (X,d) un espacio métrico y $A,B \subset X$ subconjuntos de X. Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

a) A' es cerrado

b) $\overline{A} = A \cup A'$

c) $A \subset B \implies A' \subset B'$

16. Ses (X,d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto.

a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$

b) ∂A es cerrado

c) $\partial A = \partial(X - A)$

17. Hallar el interior, la clausura, el conjunto derivado y la frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$.

$[0,1]$; $(0,1)$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \cap [0,1]$; $\mathbb{Z}$; $[0,1) \cup \{2\}$

18. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a,r) = \{x \in X \ / \ d(x,a) \leqslant r\}$.

a) Probar que $\overline{B}(a,r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$.

b) Dar un ejemplo de una bola abierta $B(a,r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a,r)$.

c) Probar que en $(\mathbb{R}^n, d)$ —siendo d cualquiera de las métricas del ejercicio 8— vale que $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$ para todo $r > 0$.

19. Pensando a $\mathbb{Z}$ como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$, caracterizar los abiertos y los cerrados. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

20. Sea (X,d) un espacio métrico y sean (x_n) , (y_n) sucesiones en X.

a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x,y)$.

b) Si (x_n) , (y_n) son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))$ es convergente.

21. Probar que todo subespacio completo de un espacio métrico es cerrado.

22. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $A \subset X$ y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* por $d_A(x) = \inf\{d(x,a) \ / \ a \in A\}$. Probar:

a) $\left|d_A(x) - d_A(y)\right| \leqslant d(x,y)$

b) $x \in A \quad \Longrightarrow \quad d_A(x) = 0$

c) $d_A(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \overline{A}$

d) $B_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

e) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X \ / \ d_A(x) \leqslant r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

f) $\{x \in X \ / \ d_A(x) > r\}$ es abierto para todo $r > 0$

g) $\{x \in X \ / \ d_A(x) \geqslant r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

23. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $A, B \subset X$ –no vacíos– se define la *distancia entre A y B* por $d(A,B) = \inf\{d(a,b) \ / \ a \in A \ , \ b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) $d(A,B) = d(\overline{A}, B)$

b) $d(A,B) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap B \neq \emptyset$

c) $d(A,B) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$

24. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

a) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ.

b) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ.

c) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

d) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0,1)$.

e) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0,1)$.
¿Qué conclusión saca de estos ejemplos?