Práctica 4

1. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$. Probar que son equivalentes:

a) f es continua

b) Para todo $x_0 \in X$ y todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$

c) Para todo $A \subset Y$ abierto, $f^{-1}(A)$ es abierto en X

d) Para $F \subset Y$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X

e) Para toda sucesión $(x_n) \subset X$ tal que $x_n \longrightarrow x \in X$, la sucesión $(f(x_n)) \subset Y$ converge a $f(x)$.

2. Decidir cuáles de las siguientes funciones son continuas:

a) $f : (\mathbb{R}, |\ |) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, $f(x) = x^2 - x + 12$

b) $f : (\mathbb{R}^2, d) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, donde d representa la métrica euclídea.

c) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, \delta) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d_\infty)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

d) $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2, d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \delta)$, la función identidad, donde δ representa la métrica discreta.

e) $i : (E,d) \longrightarrow (X,d)$, la inclusión, donde $E \subset X$

f) $\varphi : (C([0,1]), d_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |\ |)$, $\varphi(f) = f(0)$, donde $C([0,1])$ es el conjunto de las funciones continuas definidas en el intervalo real $[0,1]$ a valores en $\mathbb{R}$ y $d_\infty(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \ / \ x \in [0,1]\}$.
¿Y si consideramos en vez en $C([0,1])$ la distancia $d_1(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$?

3. Considerando en cada $\mathbb{R}^n$ la métrica euclídea, probar que:

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x^2 + y \operatorname{sen}(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado.

b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ -1 \leqslant x^3 - 3y^4 + z - 2 \leqslant 3\}$ es cerrado.

c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 \ / \ 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto.

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones.

4. Sea $f : (X,d) \longrightarrow (Y,d')$ una aplicación. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ continua para todo $i = 1,\ldots,m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

b) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para todo $i = 1, \ldots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

c) Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ y $f|_{X_i}$ continua para todo $i = 1, \ldots, m$, entonces $f : X \longrightarrow Y$ es continua.

5. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ se dice ***abierta*** si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subset X$ y se dice ***cerrada*** si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subset X$.

a) Probar que si f es biyectiva entonces, f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

b) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea abierta.

c) Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea cerrada.

d) Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada pero no continua.

6. Dos métricas d_1 y d_2 en un espacio X, se dicen ***topológicamente equivalentes*** si todo abierto de (X, d_1) es abierto en (X, d_2) y recíprocamente.

a) Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ tales que $d_1(x, y) \leqslant c_1\ d_2(x, y) \leqslant c_2\ d_1(x, y)$ para todo $x, y \in X$. Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.

b) Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad $id_X : (X, d_1) \longrightarrow (X, d_2)$ es homeomorfismo.

c) Probar que en $\mathbb{R}^n$ las métricas d_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ son todas topológicamente equivalentes.

d) Mostrar una métrica en $\mathbb{R}^n$ que no sea topológicamente equivalente a las anteriores.

7. Sean $f, g, h : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = x.f(x) \qquad h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = \frac{m}{n}\ , \quad (m : n)^1 = 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Probar que:

a) f es discontinua en todo punto

b) g sólo es continua en $x = 0$

c) h es continua en $[0, 1] - \mathbb{Q}$

[1] $(m : n)$ indica el máximo común divisor entre m y n

8. **a)** Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas y $D \subset X$ denso. Probar que si $f|_D = g|_D$ entonces, $f = g$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞; i.e., $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sup\{d(x_1, y_1), d'(x_2, y_2)\}$.

a) Probar que las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ son continuas y abiertas.

Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas.

b) Sea (Z, δ) un espacio métrico y $f : Z \longrightarrow X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1 = \pi_1 \circ f$ y $f_2 = \pi_2 \circ f$ lo son.

10. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación.

a) Probar que si f es continua y $E \subset X$ entonces, $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

Mostrar con un ejemplo que puede no valer la igualdad.

b) Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subset X$.

11. **a)** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Probar que es continua pero no abierta.

b) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$. Probar que es continua pero no cerrada.

12. Sea (X, d) un espacio métrico y sea A un subconjunto de X. Probar que la función $d_A : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $d_A(x) = d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} d(x, a)$ es continua.

13. Teorema de Urysohn

Sea (X, d) un espacio métrico y A, B cerrados disjuntos de X. Entonces, existe $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

a) $f|_A \equiv 0$

b) $f|_B \equiv 1$

c) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para todo $x \in X$

Sugerencia: considerar $\dfrac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$

Deducir que existen abiertos U, V disjuntos tales que $A \subset U$ y $B \subset V$.

14. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

15. Sea $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$.

a) Probar que f es continua. ¿Sigue valiendo si f toma valores irracionales?

b) Suponiendo que f es biyectiva, ¿puede ser un homeomorfismo?

16. Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable.

17. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \;/\; \exists\, n_0 : a_n = 0 \;\forall\, n \geq n_0\}$. Se considera la aplicación $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

18. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

a) X es separable

b) X posee una base numerable de abiertos

c) Todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable.

19. Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

20. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

21. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞ definida por

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X, d) e (Y, d') son separables.

22. Es el espacio (l^∞, d_∞) separable?.

23. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suryectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable.