Práctica 3 (Continuación)

23+1. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Probar:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$

b) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

c) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

d) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

e) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

23+2. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

23+3. Sea (X, d) un espacio métrico.

a) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

b) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

23+4. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

23+5. Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \ / \ f \text{ es acotada } \}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

23+6. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{D} \subset X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ converge en X. Probar que X es completo.

23+7. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \leqslant c\ d(x_1, x_2)$$

para todo $x_1, x_2 \in X$, donde $c \geqslant 0$. Probar que f es uniformemente continua.

23+8. **a)** Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, $A \subseteq X$ y $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si existen $\alpha > 0$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ sucesiones y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que

- $\star$ $d(x_n, y_n) \longrightarrow 0$ para $n \to \infty$
- $\star$ $d'(f(x_n), f(y_n)) \geqslant \alpha$ para todo $n \geqslant n_0$

entonces f no es uniformemente continua en A.

b) Verificar que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ¿Y en $\mathbb{R}_{\leqslant -\pi}$?

c) Verificar que la función $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$. Esto muestra que hay funciones continuas y acotadas pero no uniformemente continuas.

23+9. **a)** Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ uniformemente continua y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.

b) Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme [1]. Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.

En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformenente equivalente [2].

23+10. Demostrar que si $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ es uniformemente continua en X y $A, B \subset X$ son no vacíos y tales que $d(A, B) = 0$ entonces, $d'(f(A), f(B)) = 0$.

23+11. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ y no numerable y sea T el conjunto de puntos de condensación de S. Probar:

a) T es no vacío.

b) $S - T$ es numerable.

c) $S \cap T$ es no numerable.

d) T es un conjunto cerrado.

e) T no posee puntos aislados.

23+12. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

23+13. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

23+14. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.

Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \exists\, U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}$$

23+15. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{ f \in C[0, 1] \ / \ f \text{ es monótona en } I_n \}.$$

a) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.

b) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

[1] i.e., f y f^{-1} son uniformemente continuas

[2] Dos métricas d_1 y d_2 se dicen uniformenente equivalentes si cumplen la condición del ejercicio 5a)