Práctica 4 (Primer Parte)

1. Probar –usando la definición– que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ es compacto, donde (a_n) es una sucesión real que converge a 0.

Mostrar que el intervalo $(0, 1]$ no es compacto.

2. Sea (M, d) un espacio métrico y $S \subset T \subset M$. Probar que S es compacto en (M, d) si y sólo si S es compacto en el subespacio métrico (T, d).

3. Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

4. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

5. Lema del cubrimiento de Lebesgue

Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in I}$ de un espacio métrico (M, d), un número $\varepsilon > 0$ se llama ***número de Lebesgue*** de $(U_i)_{i \in I}$ si para todo $x \in M$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_j$.

Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

6. Sea $A = \{a^n \in \ell^\infty \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $a^n = (a^n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ está definida por

$$a^n_k = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \neq n \\ 1 & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

Probar que A es discreto, cerrado y acotado pero no compacto.

7. Probar que toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de un espacio métrico es compacta.

8. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X tiene la ***propiedad de intersección finita*** (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i \in I}$ tiene intersección no vacía.

a) Probar que un subconjunto $K \subset X$ es compacto si y sólo si toda familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos cerrados de K con la P.I.F. tiene intersección no vacía.

b) Deducir que si X es compacto, entonces todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación en X.

9. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que (X,d) es ***secuencialmente compacto*** si toda sucesión tiene una subsucesión convergente. Si para todo $\varepsilon > 0$ existen finitos puntos $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, \varepsilon)$, se dice que (X,d) es ***totalmente acotado***.

Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

a) X es compacto

b) Todo subconjunto infinito tiene un punto de acumulación en X

c) X es secuencialmente compacto

d) X es totalmente acotado y completo.

10. Sea (X,d) un espacio métrico.

a) Sean $K \subset X$ un compacto y $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$; i.e., la distancia entre x y K 'se realiza'. ¿Es cierto que $d(x,K) > 0$?

b) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1,K_2) = d(x_1,x_2)$; i.e., la distancia entre K_1 y K_2 'se realiza'. ¿Es cierto que $d(K_1,K_2) > 0$?

c) Mostrar que la afirmación del inciso anterior es falsa si K_2 es cerrado pero no compacto.

11. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X \;/\; K \text{ es compacto y no vacío}\}$$

a) Probar que $\tilde{d}(A,B) = \sup_{a \in A}\{d(a,B)\}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

b) Sea $\delta(A,B) = \text{máx}\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\}$. Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$. *Sugerencia*: probar que para todo $\varepsilon > 0$ es

$$\delta(A,B) < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B(B,\varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A,\varepsilon)$$

donde $B(C,\varepsilon) = \{K \in \mathcal{K}(X) \;/\; \delta(C,K) < \varepsilon\}$

12. Sea $C_0 = \{(x_n) \subset \mathbb{R} \;/\; \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en C_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| \;/\; n \in \mathbb{N}\}$$

a) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x,1) = \{y \in C_0 \;/\; d(x,y) \leqslant 1\}$ no es compacta.

b) Probar que (C_0,d) es separable.

13. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X,d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

14. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es continua. (Recordar: $d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \text{máx}\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$.)

15. **a)** Sea $f : \mathbb{R}_{\geqslant a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geqslant a}$.

b) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$.

c) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

16. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ compacto. Probar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geqslant K$ para todo $x \in A$.

17. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

a) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leqslant f(x)$ (resp. $f(x_0) \geqslant f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

b) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

c) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

18. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso, y sea $f : D \to \mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión a todo X. ¿Puede $\mathbb{R}$ reemplazarse por $\mathbb{R}^k$? ¿Por cualquier espacio métrico compacto? ¿Por cualquier espacio completo? ¿Por cualquier espacio métrico?