Práctica 4 (Segunda Parte)

19. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < |x| < 2\}$, $\mathbb{N}$, $[0, 1)$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}\}$

$B(a, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) en un espacio métrico (X, d).

20. Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cup B$ no sea conexo. Idem para $A \cap B$ y $A - B$.

21. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ conexo y sea x un punto de acumulación de C. Probar que $C \cup \{x\}$ es conexo.

22. Determinar la validez de las siguientes afirmaciones

a) Si C es conexo, entonces C° es conexo.

b) Si C es conexo, entonces $\overline{C}$ es conexo.

23. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subset X$. Probar que son equivalentes:

a) No existen U, V abiertos en A, no vacíos y disjuntos tales que $A = U \cup V$

b) No existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X y disjuntos de modo que $A \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $A \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $A \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

24. Probar las siguientes equivalencias

a) C es conexo

b) Si $A \subset C$ es no vacío, abierto y cerrado entonces, $A = C$

c) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado –en C– entonces, $A = C$

25. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$

$\operatorname{arcsen}([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$ [1], $\mathbb{Q}$, $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1)$,

$B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \cup \{(0, 2)\}$, $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \cup \{(0, 0)\}$

26. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$ y $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$. Probar que

a) $\{(0, 0)\}$ y $\{(0, 1)\}$ son componentes conexas de X

[1] $\operatorname{arcsen} : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ es la inversa continua de la función $\operatorname{sen}|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

b) si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X entonces, $\{(0,0),(0,1)\} \subset B$ o bien $\{(0,0),(0,1)\} \cap B = \varnothing$.

27. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \varnothing$ para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Probar que $\bigcup\limits_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

28. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados.

29. Probar que los siguientes conjuntos son totalmente disconexos [2]:

a) un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2

b) $\mathbb{Q}$

c) el conjunto de Cantor

30. Probar que el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x \notin \mathbb{Q} \;,\; y \notin \mathbb{Q}\}$ es totalmente disconexo.

31. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y abierta.

a) Probar que f no tiene extremos locales; i.e., no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leqslant f(x)$ (resp. $f(x_0) \geqslant f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

b) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a,b)$.

c) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a,b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

32. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

33. Probar que un espacio métrico (X,d) es conexo si y sólo si toda función continua de X en $\{0,1\}$ es constante.

34. **a)** Mostrar que si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua entonces, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

b) Sea (X,d) un espacio métrico conexo y $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leqslant b$. Probar que para todo $c \in [a,b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$.

¿Vale la recíproca?

c) Deducir del inciso anterior que si (X,d) es conexo, entonces $\sharp(X) = 1$ o $\sharp(X) \geqslant c$.

35. **a)** Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

[2]Un espacio métrico (X,d) se dice totalmente disconexo si $\sharp A = 1$ para todo $A \subset X$ conexo.

b) Mostrar que no todo conjunto conexo es arcoconexo.
Sugerencia: considerar el conjunto $A = \overline{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 < x \leqslant 1 \ , \ y = \operatorname{sen}(\frac{1}{x})\}}$

36. Sea (X,d) un espacio métrico arcoconexo, (Y,d') un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

37. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ z = f(x,y)\}$, $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

b) $B(0,1)$, $\mathbb{R}^n - B(0,1)$

c) $\mathbb{R}^2 - \{(x,0) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$

d) $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

38. Un espacio métrico (X,d) se dice ***localmente conexo*** (resp. ***localmente arcoconexo***) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

a) Las componentes conexas de un espacio métrico localmente conexo son abiertas.

b) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto entonces, A es conexo $\iff$ A es arcoconexo

c) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

d) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo abierto y conexo es arcoconexo.

e) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas y cerradas.

f) Un espacio métrico es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de los abiertos son abiertas.