Práctica 5

1. Hacer una lista de los espacios métricos vistos hasta ahora. ¿Cuáles son normados? ¿Cuáles son de Banach?

2. Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados y considere el espacio vectorial producto ExF con la estructura vectorial natural y las normas
$$\|(x,y)\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F$$
y
$$\|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\{\|x\|_E, \|y\|_F\}.$$
Probar que estas normas son equivalentes. ¿Se le ocurre alguna otra norma equivalente a las anteriores?

3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Probar que se verifican:
   a) $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$ (la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
   b) $diam(B_r(x)) = 2r$.

4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall\ x, y \in C$ y $\forall\ t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$.
   a) Probar que $B_r(x)$ es convexo.
   b) Probar que si $(C_i)_{i\in I}$ son convexos, entonces $\cap_{i\in I} C_i$ lo es.
   c) Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.
   d) Probar que si C es convexo, entonces $\overline{C}$ lo es.

5. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:
   a) $\overline{S}$ también es un subespacio.
   b) Si $S \neq E$, entonces $S^o = \emptyset$.
   c) Si S es un hiperplano (i.e., $\exists\ x \neq 0$ tal que $S \oplus \langle x \rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E.

6. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n) \subset E$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ convege, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

7. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados y si son hiperplanos.
   a) $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} :\ \exists \lim_{n\to\infty} x_n\} \subset l^\infty$.
   b) $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subset c$
   c) $\{x \in l^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subset l^1$

8. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Consideramos

$$L(E,F) = \{T : E \to F / \ T \text{ es lineal y continua}\},$$

y para cada $T \ \in L(E,F)$ sea

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F$$

Probar que:

a) $(L(E,F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.

b) Si F es de Banach entonces $L(E,F)$ también lo es.

9. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \to F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| =$$

$$= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M / \ \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall \ x \in E\}$$

10. Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0,1] \to C[0,1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x,y) f(y) dy$$

Probar que $Kf \in C[0,1]$ y que K es lineal y continua. Acotar su norma.

11. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\geq 1} / \ \exists n_0, \ a_n = 0 \ \forall n \geq n_0\}$ con la norma infinito. Probar que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f((a_n)_{n\geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n$$

es lineal pero no continua.

12. **a)** Sea $\phi \in C[0,1]$ y sea $T_\phi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x) dx$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)| dx$

b) Sea $T : c \to \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n\to\infty} a_n$.
Probar que T es lineal, continuo y hallar $\|T\|$.

c) Sea $1 \leq p \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ el conjugado de p y sea $b \in l^{p'}$. Definimos $T_b : l^p \to \mathbb{R}$ como sigue

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n$$

Probar que T_b es lineal, continuo y hallar $\|T_b\|$ (Ayuda: utilice la desigualdad de Hölder).

13. Sea $(E, \|\|_E)$ un espacio normado de dimensión finita.

   a) Dada una base $B = \{v_1, ..., v_m\}$ de E consideremos la transformación lineal $T : E \to \mathbb{R}^m$ dada por

   $$T\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i\right) = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$$

   I) Probar que $\| \|_T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definida por

   $$\|x\|_T = \|T^{-1}(x)\|_E$$

   es una norma en $\mathbb{R}^m$.

   II) Deducir que T es un homeomorfismo.

   b) Probar que toda forma lineal $\phi : E \to \mathbb{R}$ es continua.

   c) Probar que $(E, \|\|_E)$ es un espacio de Banach.

14. Sea $(E, \|\|_E)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio vectorial de dimensión finita. Probar que S es cerrado.

15. Mostrar que en l^2 las normas $\|\|_2$ y $\|\|_\infty$ no son equivalentes.

16. Sea $C^1[0,1]$ el epacio vectorial de las funciones $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de clase C^1 en $[0,1]$ (esto es continuas en $[0,1]$ y con derivada f' continua en $[0,1]$).

   a) Consideremos la aplicación lineal $D : (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ dada por $D(f) = f'$. Mostrar que no es continua.

   b) En cambio si en $C^1[0,1]$ consideramos la norma:

   $$\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

   $D : (C^1[0,1], \|\cdot\|_{C^1}) \to (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sí resulta continua.

   c) Probar que $C^1[0,1]$ no es completo con la norma $\|\cdot\|_\infty$ pero sí lo es con $\|\cdot\|_{C^1}$.