

PRÁCTICA 5 -COMPACIDAD, BAIRE, CONEXIÓN-

“Cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento,
más imperioso es el deseo de la vida por escapar de él hacia la libertad.”
HEGEL.

Compacidad

Ejercicio 1.

- i) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n / n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ es compacto.
- ii) Mostrar que el intervalo $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.
- iii) Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de (\mathbb{Q}, d) , donde d es la métrica euclídea de \mathbb{R} .

Ejercicio 2. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 3. Sea $A = \{a^{(n)} \in \ell^\infty / n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}}$ está definida por

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Probar que A es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 4. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in I}$ de un espacio métrico (X, d) , un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i \in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i \in I}$ tiene intersección no vacía.

Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) X es compacto.
- ii) Toda familia $(F_i)_{i \in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la P.I.F. tiene intersección no vacía.
- iii) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X .
- iv) X es secuencialmente compacto (es decir, toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente).
- v) X es completo y totalmente acotado.

Ejercicio 6. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que:

- i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.
- ii) Si (X, d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.
- iii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 7. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} / \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| / n \in \mathbb{N}\}$$

- i) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x, 1) = \{y \in C_0 / d(x, y) \leq 1\}$ no es compacta.
- ii) Probar que (c_0, d) es separable.

Ejercicio 8. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X, d) e (Y, d') son compactos.

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico.

- i) Sean $K \subset X$ un compacto y sea $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$; es decir, la distancia entre x y K 'se realiza'.
- ii) Sean $F, K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva.
- iii) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 'se realiza'.

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X / K \text{ es compacto y no vacío}\}$$

- i) Sea $\tilde{d}(A, B) = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\}$. Verificar que \tilde{d} no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.
- ii) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ como $\delta(A, B) = \max\{\tilde{d}(A, B), \tilde{d}(B, A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\delta(A, B) < \varepsilon \iff A \subset B(B, \varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A, \varepsilon)$$

donde $B(C, \varepsilon) = \{x \in X / d(x, C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$.

- iii) Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 11. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X, d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y, d') , la proyección $\pi : X \times Y \rightarrow Y$ definida por $\pi(x, y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 13. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos, y sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$, entonces f es continua.

Ejercicio 14.

- i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \rightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.
- ii) Deducir que \sqrt{x} es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.
- iii) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en \mathbb{R} .

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subset X$ compacto. Probar que si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

- i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
- ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.
- iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \rightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X .

Ejercicio 18. Sea $D \subset X$ un subconjunto denso, y sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión a todo X . ¿ Puede \mathbb{R} reemplazarse por \mathbb{R}^k ? ¿ Por cualquier espacio métrico compacto? ¿ Por cualquier espacio completo? ¿ Por cualquier espacio métrico?

Baire

Ejercicio 19. Probar que \mathbb{R}^n no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 20. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X . Probar que D no es un G_δ .

Ejercicio 21. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.

Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \text{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}$$

Ejercicio 22. Sea $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{ f \in C[0, 1] / f \text{ es monótona en } I_n \}.$$

- i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.
- ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Conexión

Ejercicio 23. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 / 0 < |x| < 2\}, \quad \mathbb{N}, \quad [0, 1), \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \right\}$$

$B(a, \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) en un espacio métrico (X, d) .

Ejercicio 24.

- i) Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tales que $A \cup B$ no sea conexo. Idem para $A \cap B$ y $A - B$.
- ii) Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ conexo y sea x un punto de acumulación de C . Probar que $C \cup \{x\}$ es conexo.
- iii) Determinar la validez de las siguientes afirmaciones:
 - (a) Si C es conexo, entonces C° es conexo.
 - (b) Si C es conexo, entonces \overline{C} es conexo.

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

- i) No existen U, V abiertos en C , no vacíos y disjuntos tales que $C = U \cup V$
- ii) No existen \mathcal{U}, \mathcal{V} abiertos en X y disjuntos, de modo que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$
- iii) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C , entonces $A = C$

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico y sea \mathcal{A} una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 0, \dots, n-1$. Probar que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

Ejercicio 27. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 28. Probar que un espacio métrico (X, d) es conexo si y sólo si toda función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 29. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre \mathbb{R} y \mathbb{R}^n .

Ejercicio 30.

- i) Probar que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua y suryectiva, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.
- ii) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a, b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. ¿Vale la recíproca?
- iii) Probar que si (X, d) es conexo, entonces $\#X = 1$ o $\#X \geq c$.

Ejercicio 31. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} y de \mathbb{R}^2

- i) $\arcsin([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$
- ii) \mathbb{Q}
- iii) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1)$
- iv) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \cup \{(0, 0)\}$

Ejercicio 32. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, y sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$. Probar que:

- i) $\{(0, 0)\}$ y $\{(0, 1)\}$ son componentes conexas de X
- ii) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X , entonces $\{(0, 0), (0, 1)\} \subset B$ o $\{(0, 0), (0, 1)\} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 33. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados.

Ejercicio 34. Probar que los siguientes conjuntos son totalmente desconexos:

- i) Un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2
- ii) \mathbb{Q}
- iii) El conjunto de Cantor

Arco-Conexión

Ejercicio 35. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

- i) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.
- ii) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

Ejercicio 36. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

- i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.
- ii) $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B(0, 1)$
- iii) $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$
- iv) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Ejercicio 37. Sean (X, d) un espacio métrico arcoconexo, (Y, d') un espacio métrico y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 38. Un espacio métrico (X, d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x , existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V de x tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

- i) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo $\iff A$ es arcoconexo
- ii) Un espacio métrico es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de los abiertos son abiertas.
- iii) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.
- iv) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.
- v) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.

Ejercicio 39. En el espacio $(C[0, 1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0, 1] : f(x) \neq 0 \forall x \in [0, 1]\}$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.